

Calculabilité et Logique

TD5 – Pavages, fonctions récursives

15 octobre 2008

Exercice 1 – Une autre formulation du problème de pavage

On note π_i la $i^{\text{ème}}$ projection (sur les n -uplets, avec $1 \leq i \leq n$, et n généralement implicite).
On considère le problème de pavage suivant :

Donnée : un ensemble fini C de couleurs, un ensemble $T \subseteq C^4$ de tuiles, et $t_0 \in T$

Question : existe-t-il une fonction de pavage $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$ telle que $f(0, 0) = t_0$ et, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $\pi_1(f(i, j)) = \pi_3(f(i + 1, j))$, $\pi_2(f(i, j)) = \pi_4(f(i, j + 1))$?

1. Montrer que ce problème est indécidable.
2. Si vous avez répondu à la question 1 en faisant une réduction à partir du problème de pavage classique, faites la réduction inverse.

Exercice 2 – Des fonctions usuelles

Sans utiliser les schémas de minimisation, maximisation ou existentiel borné, montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives :

1. $\text{moins}(n, m) = \max(0, n - m)$
2. $\text{dist}(n, m) = |n - m|$
3. $\text{fact}(n) = n!$
4. $\text{neg}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
5. $\text{egal}(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
6. $\text{cond}(c, n, m) = \begin{cases} m & \text{si } c = 0, \\ n & \text{sinon} \end{cases}$
7. $\text{mod}(n, m)$, le reste de la division entière de n par m .
8. $\text{div}(n, m)$, le quotient de la division entière de n par m .
9. $\text{val}(n, m)$, le plus grand entier k tel que m^k divise n .
10. $\langle a, b \rangle = 2^a 3^b$, et π_1, π_2 , telles que $\pi_1(\langle a, b \rangle) = a$, $\pi_2(\langle a, b \rangle) = b$.

Exercice 3 – Fibonacci

Sans utiliser des programmes LFOR, montrer que la fonction de Fibonacci est récursive primitive :

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 1, \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) & \text{sinon} \end{cases}$$