

Calculabilité et Logique

TD4 – Indécidabilité, réductions (2)

9 octobre 2008

Exercice 1 – Machines linéairement bornées

Une *machine linéairement bornée* est une machine de Turing dont l'espace de travail est limité à droite par l'extrémité du mot d'entrée.

1. Montrer que le problème suivant est décidable :

Donnée : Un automate linéairement borné M , un mot w .

Question : Est-ce que M s'arrête sur w ?

2. Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : Un automate linéairement borné M .

Question : Est-ce que $L(M) = \emptyset$?

Exercice 2 – Enumérabilité vs. recherche existentielle non bornée

Une relation binaire R sur Σ^* est dite *réursive* si l'ensemble $\{x\#y \mid R(x, y)\}$ est réursif (où $\#$ est un nouveau symbole).

Montrer que $L \subseteq \Sigma^*$ est réursivement énumérable si et seulement si il existe une relation binaire R réursive telle que $L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y. R(x, y)\}$.

Exercice 3 – Hiérarchie arithmétique

Définition : Une *machine de Turing à oracle* $B \subseteq \Sigma^*$ est une machine de Turing disposant d'un ruban distingué et de trois états spéciaux $q_?$, q_y , q_n . Si la machine entre dans l'état $q_?$ alors que le mot w est écrit sur le ruban distingué, elle effectue une transition vers l'état q_y si $w \in B$ et vers l'état q_n sinon. Cette machine peut donc, en un temps fini, obtenir la réponse à la question de l'appartenance au langage B .

On dit qu'un problème A est *réursivement énumérable dans* B s'il existe une machine de Turing M avec oracle B qui l'accepte. De plus, si M s'arrête sur toutes ses entrées, on dit que A est *réursif dans* B .

On peut alors définir les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{\text{ensembles r.e.}\} \\ \Delta_1 &= \{\text{ensembles réursifs}\} \\ \Pi_1 &= \{\text{ensembles co-r.e.}\} \\ \Sigma_{n+1} &= \{\text{ensembles r.e. dans un certain } B \in \Sigma_n\} \\ \Delta_{n+1} &= \{\text{ensembles réursifs dans un certain } B \in \Sigma_n\} \\ \Pi_{n+1} &= \{\text{complémentaires des ensembles appartenant à } \Sigma_{n+1}\}.\end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n$.
2. Montrer que :
 - $A \in \Sigma_n$ ssi il existe R récursive telle que $A = \{x \mid \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots Q y_n \cdot R(x, y_1, \dots, y_n)\}$,
où $Q = \exists$ si n est impair, $\forall$ si n est pair ;
 - $A \in \Pi_n$ ssi il existe R récursive telle que $A = \{x \mid \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots Q y_n \cdot R(x, y_1, \dots, y_n)\}$,
où $Q = \forall$ si n est impair, $\exists$ si n est pair.
3. Placer dans la hiérarchie les langages suivants :
 - $L_U, \overline{L_U}, L_{\text{arret}}, \overline{L_{\text{arret}}}$;
 - $L_{\text{vide}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}$;
 - $L_{\text{total}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^* \}$;
 - $L_{\text{fini}} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ est fini} \}$;
 - $L_{\text{cofini}} = \{ \langle M \rangle \mid \overline{L(M)} \text{ est fini} \}$.

Exercice 4 – Problème de la convergence d’une suite d’éléments de $\mathbb{Z}$

Définition : On dit qu’une suite est *définie récursivement* si pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut calculer son $n^{\text{ème}}$ terme de façon effective (c’est-à-dire : avec une machine de Turing).

On appelle *problème de la convergence d’une suite d’éléments de $\mathbb{Z}$* le problème suivant :

Donnée : une suite d’éléments de $\mathbb{Z}$ définie récursivement

Question : cette suite est-elle convergente ?

Montrer que ce problème est indécidable.

Exercice 5 – Problème du zéro dans les matrices 3×3

On appelle *problème du zéro dans les matrices 3×3* le problème suivant :

Donnée : une suite $M_1, \dots, M_n$ de matrices 3×3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Question : existe-t-il un produit fini $M = M_{i_1} \cdot M_{i_2} \cdots M_{i_r}$ tel que l’élément $(3, 2)$ de M soit nul ?

Supposons l’alphabet Σ numéroté de 1 à n , et notons b la fonction associant à un mot $u \in \Sigma^*$ sa valeur en le considérant comme un codage en base $n + 1$ (en n’utilisant pas 0). Notons également ℓ la fonction qui associe à $u \in \Sigma^*$ l’entier $(n + 1)^{|u|}$ où $|u|$ dénote la longueur de u .

En considérant l’application φ de $\Sigma^* \times \Sigma^*$ dans l’ensemble des matrices 3×3 suivante, montrer que le problème du zéro dans les matrices 3×3 est indécidable.

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \ell(u) & \ell(v) - \ell(u) & 0 \\ 0 & \ell(v) & 0 \\ b(u) & b(v) - b(u) & 1 \end{pmatrix}$$