Calculabilité et Logique

TD1 – Machines de Turing

17 septembre 2008

Exercice 1 – *Une machine de Turing*

Considérons la machine de Turing $M = (Q, q_0, \Sigma, \delta, \{B, \$\})$ où :

$$\begin{cases} Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\ \Sigma = \{a, b, X, Y, B, \$\} \end{cases}$$

et la fonction de transition δ est définie par le tableau suivant (un $-$ signifie que la fonction de transition n'est pas définie) :

	$\$$	a	b	X	Y	B
q_0	$(q_0, \$, \rightarrow)$	$(q_1, X, \rightarrow)$	$-$	$-$	$(q_3, Y, \rightarrow)$	$-$
q_1	$-$	$(q_1, a, \rightarrow)$	$(q_2, Y, \leftarrow)$	$-$	$(q_1, Y, \rightarrow)$	$-$
q_2	$-$	$(q_2, a, \leftarrow)$	$-$	$(q_0, X, \rightarrow)$	$(q_2, Y, \leftarrow)$	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$	$-$	$(q_3, Y, \rightarrow)$	$(\textbf{accept}, B, \rightarrow)$

Quel est le langage de $\{a, b\}^*$ accepté par M ?

Prouver la terminaison et la correction de la machine.

Exercice 2 – *Quelques exemples de machines de Turing*

1. Construire une machine de Turing à un seul ruban qui decide le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 0\}$.
2. Construire une machine de Turing à un seul ruban qui decide le langage $\{uc\overline{u} \mid u \in \{a, b\}^*\}$.
3. Construire une machine de Turing à un seul ruban qui decide le langage $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$.
4. Construire une machine de Turing à un seul ruban calculant $n + 1$, pour n donné en binaire sur le ruban d'entrée.
5. En utilisant ce qui précède, décrire une méthode qui permettrait de calculer $n + m$ avec une machine de Turing à un seul ruban pour n et m donnés. On pourra supposer que n et m sont représentés en binaire et que sur le ruban d'entrée, ils se trouvent sous la forme $n{+}m$ où $+$ est une nouvelle lettre.

Exercice 3 – *Machines à plusieurs rubans*

Une machine de Turing à k rubans est un tuple $M = (Q, q_0, \Sigma, \delta, \{B, \$\})$ où Q, q_0, Σ, B et $\$$ ont leurs définitions inchangées par rapport aux machines de Turing classiques, mais où la fonction de transition δ est une fonction de $Q \times \Sigma^k$ dans $(Q \cup \{\textbf{accept}, \textbf{reject}\}) \times (\Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, \downarrow\})^k$.

Montrer que tout langage accepté par une machine de Turing à k rubans, l'est aussi par une machine à un seul ruban.

Exercice 4 – *Busy Beavers*

Le problème des "busy beavers" (en français : "castors affairés") a été introduit par Rado, dans le but de définir "simplement" une fonction non calculable. Le modèle de machines de Turing considéré est le suivant : on suppose les machines déterministes, possédant un ruban bi-infini, un alphabet réduit à $\{0, 1\}$ (les symboles blanc et $\$$ sont notés 0), et devant toujours se déplacer ou bien à gauche ou bien à droite (la machine ne peut pas rester sur place). On suppose de plus que les machines possèdent un unique état final, duquel aucune transition ne sort, et qui n'est pas compté parmi les états de la machine. Enfin, on considérera toujours un ruban initialement complètement blanc. La fonction de Rado, notée $\Sigma(n)$, est définie comme le nombre maximum de 1 écrits sur la bande (pas nécessairement consécutifs) après qu'une machine à n états se soit arrêtée.

1. Justifier l'existence de $\Sigma(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. Calculer $\Sigma(1), \Sigma(2)$.

3. Montrer que $\Sigma(3) \geqslant 6$ (cette borne est en fait optimale).

4. Le modèle de fonction calculable considéré est le suivant : f est calculable ssi il existe une machine de Turing qui, sur un ruban contenant initialement n symboles 1 consécutifs à droite du symbole blanc de départ, s'arrête après un nombre fini de déplacements en produisant un bloc de $f(n)$ symboles 1 consécutifs. Montrer que la fonction de Rado n'est pas calculable.