Calculabilité et Logique

TD9 – Logique propositionnelle, NP

2 décembre 2008

Exercice 1 – $\mathbf{NK}$ *et jugements infinis*

On considère des jugements infinis $S \vdash F$, où S est un ensemble, possiblement infini, de formules propositionnelles. On définit $\rho \models S \vdash F$ par si et seulement si $\rho \models F$ ou il existe une formule $G \in S$ telle que $\rho \not\models G$. Un jugement infini $S \vdash F$ est valide si et seulement si $\rho \models S \vdash F$ pour tout environnement ρ. Démontrer que $\mathbf{NK}$ est aussi correct et complet pour les jugements infinis, au sens où un jugement infini $S \vdash F$ est valide si et seulement s'il existe Γ fini inclus dans S tel que $\Gamma \vdash F$ est dérivable en $\mathbf{NK}$.

Exercice 2 – *Règles admissibles en* $\mathbf{NK}$

Démontrer que les règles suivantes sont admissibles en $\mathbf{NK}$:

$$\frac{\Theta \vdash F}{\Theta, \neg F \vdash \bot}$$

$$\frac{\Theta \vdash \neg F}{\Theta, F \vdash \bot}$$

$$\frac{\Theta, \neg F \vdash \bot}{\Theta \vdash F}$$

Exercice 3 – *Ensembles de formules indépendants*

Un ensemble Γ de formules propositionnelles est *indépendant* si pour tout $F \in \Gamma$, le jugement $\Gamma \setminus \{F\} \vdash F$ n'est pas derivable (en $\mathbf{NK}$).

Démontrer que chaque ensemble fini de formules Γ a un sous-ensemble indépendant Δ tel que :

$$\text{pour tout } F \in \Gamma, \;\; \Delta \vdash F \text{ est dérivable en } \mathbf{NK}.$$

Exercice 4 – *Règle d'axiome générale en* $\mathbf{LK}$

Montrer que la règle d'axiome générale :

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F, \Delta}\,(Ax_{Gnrl})$$

est admissible dans $\mathbf{LK}$, avec ou sans (Cut).

Exercice 5 – *Traduction de* $\mathbf{LK}$ *en* $\mathbf{NK}$

Une autre façon de montrer que $\mathbf{LK}$ est correct est de traduire les dérivations de $\mathbf{LK}$ en dérivations de $\mathbf{NK}$. Montrer que l'on peut (et même algorithmiquement, et en temps polynomial) transformer toute dérivation π de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathbf{LK}$ en une dérivation de $\Gamma, \neg\Delta \vdash \perp$ dans $\mathbf{NK}$, où $\neg\Delta$ est l'ensemble des négations de formules de Δ.

Exercice 6 – *Traduction de* $\mathbf{NK}$ *en* $\mathbf{LK}$

Montrer qu'il existe une traduction algorithmique des dérivations de $\mathbf{NK}$ en dérivations de $\mathbf{LK}$ (avec coupure). Montrer que $\mathbf{LK}$ est complet en utilisant cette traduction et le théorème de complétude de $\mathbf{NK}$.

Exercice 7 – *LNA*

Montrer qu'il existe un langage qui est trivialement $\mathbf{NP}$-complet : le langage LNA (Linear Non-deterministic machine Acceptance) des triplets $(< \mathcal{M} >, x, 1^n)$, où $\mathcal{M}$ est une machine de Turing non-déterministe à une bande, et $\mathcal{M}$ accepte x en au plus n étapes. (La notation 1^n est une autre façon d'exprimer que n est écrit en unaire.)

Exercice 8 – *3-SAT*

On appelle 3-*clause* une clause contenant au plus 3 littéraux. Démontrer que le problème 3-SAT suivant est $\mathbf{NP}$-complet :
ENTRÉE : une liste finie, S, de 3-clauses ;
QUESTION : S est-elle satisfiable ?

Exercice 9 – *FORM-SAT*

Soit FORM-SAT le problème de la satisfiabilité de formules propositionnelles générales. Montrer que FORM-SAT est $\mathbf{NP}$-complet.

Exercice 10 – *3-SAT-3-OCC*

1. Le problème 3-SAT-3-OCC est le suivant :
   ENTRÉE : une liste finie, S, de 3-clauses, où chaque variable propositionnelle apparaît au plus 3 fois ;
   QUESTION : S est-elle satisfiable ?
   Montrer que 3-SAT-3-OCC est $\mathbf{NP}$-complet.
2. Montrer que 3-SAT-3-OCC reste $\mathbf{NP}$-complet même lorsque chaque littéral a, au plus, 2 occurences dans la formule.

Le système NK

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\,(Ax) \quad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\,(\top I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\,(\bot E) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg F}{\Gamma \vdash F}\,(\neg\neg E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \quad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\,(\wedge I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_1}\,(\wedge E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_2}\,(\wedge E_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee I_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee I_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2 \quad \Gamma, F_1 \vdash G \quad \Gamma, F_2 \vdash G}{\Gamma \vdash G}\,(\vee E)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\,(\neg I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\,(\neg E)$$

$$\frac{\Gamma, F_1 \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2}\,(\Rightarrow I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_2}\,(\Rightarrow E)$$

Le système LK

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\,(Ax_{Atom}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma', F \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(Cut)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\,(\vdash \top) \qquad\qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\,(\bot \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1, \Delta \quad \Gamma \vdash F_2, \Delta}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2, \Delta}\,(\vdash \wedge) \qquad\qquad \frac{\Gamma, F_1, F_2 \vdash \Delta}{\Gamma, F_1 \wedge F_2 \vdash \Delta}\,(\wedge \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1, F_2, \Delta}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2, \Delta}\,(\vdash \vee) \qquad\qquad \frac{\Gamma, F_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, F_2 \vdash \Delta}{\Gamma, F_1 \vee F_2 \vdash \Delta}\,(\vee \vdash)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg F, \Delta}\,(\vdash \neg) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}\,(\neg \vdash)$$

$$\frac{\Gamma, F_1 \vdash F_2, \Delta}{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2, \Delta}\,(\vdash\Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma, F_2 \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash F_1, \Delta}{\Gamma, F_1 \Rightarrow F_2 \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash)$$