Calculabilité et Logique

TD8 – Logique propositionnelle

19 novembre 2008

Exercice 1 – *Théorème de compacité*

Soit S un ensemble de formules propositionnelles. Supposons que, pour chaque partie finie S' de S, on puisse trouver un environnement $\rho_{S'}$ qui satisfait S'. Montrer cependant qu'il existe un environnement ρ qui satisfait tout S.

Exercice 2 – *Complétude fonctionnelle*

Soit f une fonction totale $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, avec $n \geqslant 1$.

1. Démontrer qu'il existe une formule propositionnelle F avec $\mathrm{FV}(F) = \{A_1, \dots A_n\}$, utilisant seulement ses variables libres et les connecteurs $\{\vee, \neg\}$, telle que pour tout environnement ρ :

$$\mathcal{C}\,[\![F]\!]\,\rho = f(\rho(A_1), \dots, \rho(A_n))$$

   où $\mathcal{C}\,[\![F]\!]\,\rho$ est la "valeur de vérité" de F sous ρ, c'est à dire $\mathcal{C}\,[\![F]\!]\,\rho = 1$ si $\rho \models F$ et $\mathcal{C}\,[\![F]\!]\,\rho = 0$ si $\rho \not\models F$.

2. Trouver une formule propositionnelle F définie comme dans le point précédent pour les fonctions suivantes :
   - l'opérateur *Xor* défini comme : $f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 = x_2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
   - l'opérateur de majorité : $f_m(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3 – *Affaiblissement*

Montrer que la règle d'*affaiblissement* :

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, \Delta \vdash F}\,(Aff)$$

est *admissible* dans **NK** au sens où l'on peut transformer toute dérivation de $\Gamma \vdash F$ en une de $\Gamma, \Delta \vdash F$. (On note Γ, Δ l'union des deux ensembles de formules Γ et Δ.)

Exercice 4 – *Dérivations en* **NK**

1. Donner une dérivation du jugement $\vdash (F_1 \vee F_2) \Rightarrow (F_2 \vee F_1)$ en **NK**.
2. Donner une dérivation en **NK** de $\neg(F_1 \vee F_2) \vdash \neg F_1 \wedge \neg F_2$. On fournira pour ceci deux dérivations, une de $\neg(F_1 \vee F_2) \vdash \neg F_1$, l'autre de $\neg(F_1 \vee F_2) \vdash \neg F_2$, et l'on utilisera $(\wedge I)$. On demande de plus à ne pas utiliser la règle $(\neg\neg E)$.

3. Déduire du point précédent une démonstration en **NK** (utilisant $(\neg\neg E)$ cette fois-ci) de la loi du *tiers exclu* : $\vdash F \vee \neg F$.

Exercice 5 – *Règle superflue dans* **NK**

Montrer que la règle $(\bot E)$ est superflue dans **NK**, au sens où elle est déjà admissible dans **NK** privé de $(\bot E)$.

Exercice 6 – *Complétude*

(**Rappel** : pour tout environnement partiel ϱ de domaine $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ on denote $\Delta_\varrho = \{A_j | \varrho(A_j) = 1, 0 \leqslant j \leqslant n-1\} \cup \{\neg A_j | \varrho(A_j) = 0, 0 \leqslant j \leqslant n-1\}$.)

Si $F = F_1 \vee F_2$ (respectivement $F = F_1 \Rightarrow F_2$, $F = \top$, $F = \bot$) et $\mathrm{FV}(F) \subseteq \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$, démontrer $(*)$ ci-dessous, en supposant $(*)$ vrai pour F_1 et F_2 :

$(*)$ Pour tout environnement partiel ϱ de domaine $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$, si $\varrho \models F$, alors $\Delta_\varrho \vdash F$ est dérivable en **NK**, et si $\varrho \not\models F$ alors $\Delta_\varrho \vdash \neg F$ est dérivable en **NK**.

Exercice 7 – **NK** *et jugements infinis*

On considère des jugements infinis $S \vdash F$, où S est un ensemble, possiblement infini, de formules propositionnelles. On définit $\rho \models S \vdash F$ par si et seulement si $\rho \models F$ ou il existe une formule $G \in S$ telle que $\rho \not\models G$. On définit comme plus haut la notion de validité d'un jugement infini. Démontrer que **NK** est aussi correct et complet pour les jugements infinis, au sens où un jugement infini $S \vdash F$ est valide si et seulement s'il existe Γ fini inclus dans S tel que $\Gamma \vdash F$ est dérivable en **NK**.

Exercice 8 – *Ensembles indépendants*

Un ensemble Γ de formules propositionnelles est *indépendant* si pour tout $F \in \Gamma$, le jugement $\Gamma \setminus \{F\} \vdash F$ n'est pas derivable (en **NK**).

Démontrer que chaque ensemble fini de formules Γ a un sous-ensemble indépendant Δ tel que :

$$\text{pour tout } F \in \Gamma, \quad \Delta \vdash F \text{ est dérivable en } \mathbf{NK}.$$

Exercice 9 – *Règle d'axiome générale en* **LK**

Montrer que la règle d'axiome générale :

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F, \Delta}\ (Ax_{Gnrl})$$

est admissible dans **LK**, avec ou sans (Cut).

Exercice 10 – *Traduction de* **LK** *en* **NK**

Une autre façon de montrer que **LK** est correct est de traduire les dérivations de **LK** en dérivations de **NK**. Montrer que l'on peut (et même algorithmiquement, et en temps polynomial) transformer toute dérivation π de $\Gamma \vdash \Delta$ dans **LK** en une dérivation de $\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ dans **NK**, où $\neg\Delta$ est l'ensemble des négations de formules de Δ.

Le système NK

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\,(Ax) \quad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\,(\top I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\,(\bot E) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg F}{\Gamma \vdash F}\,(\neg\neg E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \quad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\,(\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_1}\,(\wedge E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_2}\,(\wedge E_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee I_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee I_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2 \quad \Gamma, F_1 \vdash G \quad \Gamma, F_2 \vdash G}{\Gamma \vdash G}\,(\vee E)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\,(\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\,(\neg E)$$

$$\frac{\Gamma, F_1 \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2}\,(\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_2}\,(\Rightarrow E)$$

Le système LK

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\,(Ax_{Atom}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \quad \Gamma', F \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(Cut)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\,(\vdash \top) \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\,(\bot \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1, \Delta \quad \Gamma \vdash F_2, \Delta}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2, \Delta}\,(\vdash \wedge) \qquad \frac{\Gamma, F_1, F_2 \vdash \Delta}{\Gamma, F_1 \wedge F_2 \vdash \Delta}\,(\wedge \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1, F_2, \Delta}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2, \Delta}\,(\vdash \vee) \qquad \frac{\Gamma, F_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, F_2 \vdash \Delta}{\Gamma, F_1 \vee F_2 \vdash \Delta}\,(\vee \vdash)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg F, \Delta}\,(\vdash \neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}\,(\neg \vdash)$$

$$\frac{\Gamma, F_1 \vdash F_2, \Delta}{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2, \Delta}\,(\vdash\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, F_2 \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash F_1, \Delta}{\Gamma, F_1 \Rightarrow F_2 \vdash \Delta}\,(\Rightarrow\vdash)$$