Calculabilité et Logique

TD13 – Logique intuitionniste

7 janvier 2009

Exercice 1 – *Formules intuitionnistiquement équivalentes*

Montrer que $\rho, n \Vdash \neg F$ si et seulement si $\rho, n \Vdash F \Rightarrow \bot$. Montrer de même que $\Gamma \vdash \neg F$ est dérivable en **NJ** si et seulement si $\Gamma \vdash F \Rightarrow \bot$ est dérivable en **NJ**.

Exercice 2 – **NJ** *et sémantique de réalisabilité*

Considerer les regles $(\vee E)$ et $(\neg E)$ du système $\mathbf{NJ}_{\mathrm{rig}}$. Supposer que les prémisses sont des jugements réalisable ; démontrer que la conclusion est également réalisable. Discuter pourquoi les démonstrations données ne sont pas valables pour la règle $(\neg\neg E)$.

Exercice 3 – **NJ** *pour les formules niées*

Donner une dérivation de $\Gamma \vdash F \Rightarrow \neg\neg F$ en **NJ**. En déduire une de $\Gamma \vdash \neg\neg\neg F \Rightarrow \neg F$. En conséquence, montrer que la règle $(\neg\neg E)$ est admissible en **NJ** pour les formules *niées*, c'est-à-dire de la forme $\neg F$.

Exercice 4 – *Théorème de Harrop*

Les formules de Harrop sont définies par la grammaire :

$$H \quad ::= \quad A \mid F \Rightarrow H \mid H \wedge H$$

où A parcourt les formules atomiques, et F les formules arbitraires. Démontrer le *théorème de Harrop* : si Γ est un ensemble fini de formules de Harrop et $\Gamma \vdash F \vee G$ est démontrable en **LJ**, alors $\Gamma \vdash F$ ou $\Gamma \vdash G$ l'est déjà. Montrer que ceci échoue si Γ n'est pas un ensemble de formules de Harrop.

Exercice 5 – *Lois de De Morgan*

Montrer que $\Gamma \vdash \neg(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow \neg F_1 \vee \neg F_2$ n'est pas en général dérivable en **LJ**. (On considérera le cas où Γ est vide, et F_1 et F_2 sont atomiques.) Montrer que, en revanche, $\Gamma \vdash \neg(F_1 \vee F_2) \Rightarrow \neg F_1 \wedge \neg F_2$ est dérivable en **LJ**.

Exercice 6 – *Implication intuitionniste*

Montrer que $\Gamma \vdash (F_1 \Rightarrow F_2) \Rightarrow (\neg F_1 \vee F_2)$ n'est pas en général dérivable en **LJ**, alors que $\Gamma \vdash (\neg F_1 \vee F_2) \Rightarrow (F_1 \Rightarrow F_2)$ l'est.

Exercice 7 – *Traduction de Gödel*

On définit la traduction suivante de l'espace des formules vers lui-même, due à Gödel :

$$
\begin{array}{rclrcl}
A^* & = & \neg\neg A & & & \\
\top^* & = & \top & \bot^* & = & \bot \\
(F_1 \wedge F_2)^* & = & F_1^* \wedge F_2^* & (F_1 \vee F_2)^* & = & \neg(\neg F_1^* \wedge \neg F_2^*) \\
(\neg F)^* & = & \neg F^* & (F_1 \Rightarrow F_2)^* & = & F_1^* \Rightarrow F_2^*
\end{array}
$$

On notera que F est *classiquement équivalente* à F^*, c'est-à-dire que les environnements ρ qui satisfont F sont exactement les mêmes que ceux qui satisfont F^*. Démontrer que $\Delta \vdash \neg\neg F^* \Rightarrow F^*$ est dérivable en **NJ** pour toute formule propositionnelle F. En déduire que le jugement $\Gamma \vdash F$ est valide si et seulement si $\Gamma^* \vdash F^*$ est dérivable en **NJ**, où Γ^* est l'ensemble des formules G^*, lorsque G parcourt Γ.

Exercice 8 – *Théorème de Glivenko*

Montrer que, si $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable en $\mathbf{LK}_{\mathrm{cf}}$, alors $\neg\neg\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ est dérivable en **LJ**, où l'on note $\neg\Gamma$ l'ensemble des formules $\neg G$, $G \in \Gamma$. En déduire le *théorème de Glivenko* : F est (classiquement) valide si et seulement si $\vdash \neg\neg F$ est dérivable en **LJ** (resp., **NJ**).

Exercice 9 – *Validité de formules niées*

Montrer que toute formule propositionnelle niée $\neg F$ est (classiquement) valide ssi $\vdash \neg F$ est dérivable en **LJ**.

Exercice 10 – *Sémantique de Kripke*

1. Étant donné l'univers de Kripke W défini comme suit :

$$
\begin{tikzcd}
w_1 \\
w_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

W

a. Construire un W-environnement ρ sur les variables $\{A_i, i = 1..3\}$ tel que

$$\rho,\ w_0 \not\models \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} A_i \Leftrightarrow A_j$$

b. Montrer que pour tout W-environnement ρ sur les variables $\{A_i, i = 1..4\}$:

$$\rho,\ w_0 \models \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} A_i \Leftrightarrow A_j$$

2. Montrer que les formules $F_1 = A \vee \neg A$, $F_2 = \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ et $F_3 = (B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg B \vee A)$ ne sont pas intuitionnistiquement valides, en construisant, pour chaque formule $F_i, i = 1..3$, un univers de Kripke W_i, un W_i-environnement ρ_i et un monde $w_i \in W_i$ tels que :

$$\rho_i, w_i \not\models F_i$$

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\,(Ax) \quad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\,(\top I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash G}\,(\bot E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \quad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\,(\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_1}\,(\wedge E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_2}\,(\wedge E_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee I_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee I_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2 \quad \Gamma, F_1 \vdash G \quad \Gamma, F_2 \vdash G}{\Gamma \vdash G}\,(\vee E)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\,(\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\,(\neg E)$$

$$\frac{\Gamma, F_1 \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2}\,(\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2 \quad \Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_2}\,(\Rightarrow E)$$

– Le système de déduction naturelle **NJ** pour la logique intuitionniste –

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(Ax_{Atom}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma', F \vdash G}{\Gamma, \Gamma' \vdash G}\,(Cut)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\,(\vdash \top) \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash G}\,(\bot \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \quad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\,(\vdash \wedge) \qquad \frac{\Gamma, F_1, F_2 \vdash G}{\Gamma, F_1 \wedge F_2 \vdash G}\,(\wedge \vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vdash \vee_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vdash \vee_2) \qquad \frac{\Gamma, F_1 \vdash G \quad \Gamma, F_2 \vdash G}{\Gamma, F_1 \vee F_2 \vdash G}\,(\vee \vdash)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\,(\vdash \neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, \neg F \vdash G}\,(\neg \vdash)$$

$$\frac{\Gamma, F_1 \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow F_2}\,(\vdash\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, F_2 \vdash G \quad \Gamma \vdash F_1}{\Gamma, F_1 \Rightarrow F_2 \vdash G}\,(\Rightarrow\vdash)$$

– Le système de calcul des séquents **LJ** pour la logique propositionnelle intuitionniste –