Calculabilité et Logique

TD11 – Problèmes dans $\mathbf{NP}$

10 décembre 2008

Pour chacun des problèmes suivants, démontrer s'il appartient à NP, s'il est NP-complet.

Exercice 1 – *INDEPENDENT SET*

Un *ensemble indépendant* dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de G, c'est-à-dire tel que $u, v \in C$ implique $\{u, v\} \notin E$.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
QUESTION : G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m ?

Considérer également le problème INDEPENDENT SET restreint aux graphes où chaque sommet est au plus de degré 4.

Exercice 2 – *NODE COVER*

Un *recouvrement* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de E est incidente à C, c'est-à-dire à au moins un élément de C.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
QUESTION : G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?

Exercice 3 – *CLIQUE*

Une *clique* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ induisant un sous-graphe complet de G, c'est-à-dire tel que pour tous $u, v \in C$ avec $u \neq v$, on a $\{u, v\} \in E$.
ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;
QUESTION : G a-t-il une clique de cardinal au moins m ?

Exercice 4 – *NAESAT*

ENTRÉE : une conjonction finie S de 3-clauses ayant chacune exactement trois littéraux ;
QUESTION : Existe-t-il un environnement ρ tel que pour aucune clause $L_1 \vee L_2 \vee L_3$ de S, on ait $\mathcal{C}\llbracket L_1 \rrbracket \rho = \mathcal{C}\llbracket L_2 \rrbracket \rho = \mathcal{C}\llbracket L_3 \rrbracket \rho$?

Exercice 5 – *3-COLORING*

Une *k-coloration* d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \to \{0, \ldots k-1\}$ telle que si $\{u, v\} \in E$ alors $c(u) \neq c(v)$.
ENTRÉE : un graphe non orienté G ;
QUESTION : Existe-t-il une 3-coloration de G ?

Exercice 6 – *TABLE MEMBERSHIP*

On suppose un ensemble dénombrable D de "constantes" et un ensemble dénombrable X de "variables", une *table* d'arité k est une relation finie $T \subseteq (D \cup X)^k$. On dit qu'une relation finie R est représentée par T si il existe une evaluation $v : X \to D$ telle que $v(T) \subseteq R$ (où $v(T)$ est la relation obtenue à partir de T en remplaçant chaque occurrence des variables $x \in X$ par $v(x)$).

1. ENTRÉE : Une table T et une relation R ;
QUESTION : Est-ce que R est représentée par T ?

2. ENTRÉE : Une table T où chaque variable apparaît au plus une fois et une relation R ;
QUESTION : Est-ce que R est représentée par T ?

Exercice 7 – *GRAPH HOMOMORPHISM*

Un homomorphisme d'un graphe $G = (V, E)$ à un graphe $G' = (V', E')$ est une fonction $h : V \to V'$ telle que pour tout $\{v_1, v_2\} \in E$, on a $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$.
ENTRÉE : deux graphes non-orientés, G_1 et G_2 ;
QUESTION : Existe-t-il un homomorphisme de G_1 à G_2 ?

Exercice 8 – *SUBGRAPH ISOMORPHISM*

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si $|V| = |V'|$ et $|E| = |E'|$ et il existe une fonction bijective $h : V \to V'$ telle que $\{v_1, v_2\} \in E$, si et seulement si $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$.
ENTRÉE : Deux graphes G et H.
QUESTION : Est-ce que G contient un sous-graphe isomorphe à H ?

Exercice 9 – *2-SAT*

ENTRÉE : une conjonction finie S de clauses ayant exactement 2 littéraux ;
QUESTION : S est-elle satisfiable ?