

Calculabilité et Logique

TD10 – NP, Réductions

3 décembre 2008

Exercice 1 – LNA

Montrer qu'il existe un langage qui est trivialement **NP**-complet : le langage LNA (Linear Non-deterministic machine Acceptance) des triplets $(\langle \mathcal{M} \rangle, x, 1^n)$, où $\mathcal{M}$ est une machine de Turing non-déterministe à une bande, et $\mathcal{M}$ accepte x en au plus n étapes. (La notation 1^n est une autre façon d'exprimer que n est écrit en unaire.)

Exercice 2 – 3-SAT

On appelle *3-clause* une clause contenant au plus 3 littéraux. Démontrer que le problème 3-SAT suivant est **NP**-complet :

ENTRÉE : une liste finie, S , de 3-clauses ;

QUESTION : S est-elle satisfiable ?

Exercice 3 – FORM-SAT

Soit FORM-SAT le problème de la satisfiabilité de formules propositionnelles générales. Montrer que FORM-SAT est **NP**-complet.

Exercice 4 – 3-SAT-3-OCC

1. Le problème 3-SAT-3-OCC est le suivant :

ENTRÉE : une liste finie, S , de 3-clauses, où chaque variable propositionnelle apparaît au plus 3 fois ;

QUESTION : S est-elle satisfiable ?

Montrer que 3-SAT-3-OCC est **NP**-complet.

2. Montrer que 3-SAT-3-OCC reste **NP**-complet même lorsque chaque littéral a, au plus, 2 occurrences dans la formule.

Exercice 5 – INDEPENDENT SET

1. Démontrer que le langage INDEPENDENT SET défini comme suit est **NP**-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;

QUESTION : G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m ?

2. Montrer que INDEPENDENT SET reste **NP**-complet même lorsqu'il est restreint aux graphes où chaque sommet est au plus de degré 4.

Exercice 6 – NODE COVER

Un *recouvrement* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de E est incidente à C , c'est-à-dire à au moins un élément de C . Démontrer que le langage NODE COVER défini comme suit est **NP**-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe);

QUESTION : G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?

Exercice 7 – CLIQUE

Une *clique* C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ induisant un sous-graphe complet de G , c'est-à-dire tel que pour tous $u, v \in C$ avec $u \neq v$, on a $\{u, v\} \in E$. Montrer que le problème CLIQUE défini comme suit est **NP**-complet.

ENTRÉE : un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe);

QUESTION : G a-t-il une clique de cardinal au moins m ?

Exercice 8 – 2-SAT

Le problème 2-SAT est défini comme suit :

ENTRÉE : une conjonction finie, S , de clauses ayant exactement 2 littéraux ;

QUESTION : S est-elle satisfiable ?

Est-ce que 2-SAT est dans **NP** ? Est-il **NP**-complet ?