

Calculabilité et Logique – Exercices de 04/11/2009

Exercice 1 ()

On peut caractériser l'addition des entiers avec les lois $x + 0 = x$ et $x + s(y) = s(x + y)$. Si $=$ est interprété comme l'égalité et 0 et s comme habituel, on peut donner une formule qui caractérise un prédicat A comme l'addition :

$$\phi_A = \forall x. A(x, 0, x) \wedge \forall x, y, z. (A(x, y, z) \rightarrow A(x, s(y), s(z))) \wedge \forall x, y, z, w. (A(x, y, z) \wedge A(x, y, w)) \rightarrow z = w$$

1. Donner une formule ϕ_M pour la multiplication avec les lois $x \cdot 0 = 0$ et $x \cdot s(y) = x \cdot y + z$.
2. Donner des formules pour exprimer que
 - $D(x, y)$ ssi y divise x ;
 - $P(x)$ ssi x est un nombre premier ;
 - $G(x, y)$ ssi y est plus grand que x .
3. Donner une formule qui exprime qu'il y a un nombre infini des nombres premiers.

Exercice 2

Montrer que la forme prénexe n'est pas unique : donner une formule ϕ qui se réduit de deux façons par les règles de mise sous forme prénexe.

Exercice 3

Montrer que la Skolémisation ne préserve pas l'équivalence ; donner une formule ϕ et une forme Skolémisée ϕ' et une structure \mathcal{S} tel que \mathcal{S} satisfait l'une mais pas l'autre.

Exercice 4 ()

Soit $\phi := \exists x. \forall y. \neg((P(b, g(x)) \vee \forall z. Q(f(z))) \wedge R(y))$.

- Mettre ϕ en forme prénexe.
- Prendre le résultat et en donner une forme Skolémisée.
- Prendre le résultat et en donner une forme clausale.

Exercice 5 ()

Soit ϕ une formule du premier ordre. Donner un algorithme qui obtient une formule ψ telle que

- ψ est en forme prénexe et tous les quantificateurs sont existentiels ;
- ψ est valide ssi ϕ est valide.

Exercice 6 ()

Soit $\phi = N(a) \wedge \forall x. \exists y. (K(x, y) \wedge \neg N(y)) \wedge \forall x, y, z. ((K(x, y) \wedge K(y, z)) \rightarrow K(x, z))$.

1. ϕ est satisfaisable. Donner un modèle de ϕ .
2. Mettre ϕ en forme Skolémisée.
3. Donner un modèle de Herbrand pour cette forme Skolémisée.

Exercice 7

Soit $\phi = (\exists x (M(x) \wedge \neg P(x)) \wedge \forall x. (M(x) \rightarrow S(x))) \rightarrow \forall x (S(x) \wedge \neg P(x))$.

1. Donner la forme Skolémisée ψ de ϕ .
2. Donner l'univers de Herbrand pour ψ .
3. Donner toutes les structures de Herbrand pour ψ .
4. Est-ce qu'il y a une structure de Herbrand qui satisfait ψ . Qu'est-ce qu'on peut en déduire pour ϕ ?