# TD 7

**Exercice 1.** Soit $c$ un programme et $\rho$ un environnement. Montrez que s'il existe une suite infinie $(c \cdot \varepsilon, \rho) = q_0 \to q_1 \to \cdots \to q_n \to \ldots$, alors pour tout environnement $\rho_\infty$, le jugement $\rho \vdash c \Rightarrow \rho_\infty$ n'est pas dérivable.

**Exercice 2.** Treillis complet :

Montrer que l'ensemble des parties d'un ensemble $A$ quelconque est un treillis complet.

**Exercice 3.** Sur le théorème de Knaster-Tarski :

**Theorem 1** (Knaster-Tarski)**.** Soit $(X, \leq)$ un treillis complet et $f : X \to X$ une fonction monotone. Alors $f$ a un plus petit point fixe $\mathrm{lfp}(f)$ et un plus grand point fixe $\mathrm{gfp}(f)$. De plus, l'ensemble $Fix(f)$ des points fixes de $f$ est un treillis complet (pour $\leq$).

1. Finissez la démonstration vue en cours.
2. Démontrez le thérorème de Cantor-Schröder-Bernstein : si $A$ et $B$ sont deux ensembles tels qu'il existe une injection $f$ de $A$ dans $B$ et une injection $g$ de $B$ dans $A$, alors $A$ et $B$ sont équipotents.
   *Indication : chercher $X \subseteq A$ tel que pour $Y = B \setminus f(X)$, on a $g(Y) = A \setminus X$.*

**Exercice 4.** Dessinez les ensembles ordonnés suivants et indiquez lesquels sont des DCPO. Justifiez.

1. $\mathbf{1} = \{\perp\}$
2. $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ avec $x < y$ ssi $x = \perp$ et $y \neq \perp$.
3. $\mathbb{N}$ avec l'ordre usuel (*i.e.* $\omega$ pour les intimes).
4. $\mathbb{N}_\perp$ avec $x < y$ ssi $x = \perp$ et $y \in \mathbb{N}$.
5. $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec l'ordre usuel étendu par $n \leq \infty$ pour tout $n$ (*i.e.* $\omega + 1$ pour les intimes).
6. $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit.
7. $(\mathbb{N} \cup \{\infty\})^2$ avec l'ordre produit.
8. $\mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$ avec l'ordre produit.
9. $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre lexicographique ($\omega^2$ pour les intimes).
10. $\mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$ avec l'ordre lexicographique ($\omega^2 + 1$ pour les intimes).
11. $\Sigma^*$ avec l'ordre préfixe ($\Sigma$ alphabet fini).
12. $\Sigma^* \cup \{\top\}$ avec l'ordre préfixe ($w \leq \top$).
13. $\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ avec l'ordre préfixe.
14. $\{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ ($I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$).
15. $\{[x, y] \mid x, y \in I \cap \mathbb{Q}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$.

**Exercice 5.**

1. Montrez qu'une fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ monotone admet un point fixe.
2. Montrez que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction monotone alors :
   $$f\Big(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} x_n\Big) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) \text{ pour toute suite croissante à valeurs dans } [0, 1]$$
   $$\text{ssi } f \text{ est continue à gauche sur } [0, 1]$$
3. En déduire que $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$ n'est pas toujours un point fixe de $f$.