TD 9 : Expressivité

1 CTL$^+$

CTL$^+$ étend CTL en permettant des connecteurs booléens sur les formules de chemins, selon la syntaxe abstraite

$$f ::= \top \mid a \mid f \wedge g \mid \neg f \mid \mathsf{E}\varphi \mid \mathsf{A}\varphi \qquad \text{(formules d'état } f, g\text{)}$$
$$\varphi ::= \varphi \wedge \psi \mid \neg\varphi \mid \mathsf{X}f \mid f \,\mathsf{U}\, g \qquad \text{(formules de chemin } \varphi, \psi\text{)}$$

où a est une proposition atomique. La sémantique associée à une formule CTL$^+$ est simplement celle qu'on lui attribuerait en CTL*.

On cherche à montrer que, pour toute formule CTL$^+$, il existe une formule CTL équivalente.

1. Donner une formule CTL équivalente à

$$\mathsf{E}((a_1 \,\mathsf{U}\, b_1) \wedge (a_2 \,\mathsf{U}\, b_2))$$

   Généralisez cette traduction à toute formule

$$\mathsf{E}(\bigwedge_{i=1,\ldots,n}(\psi_i \,\mathsf{U}\, \psi'_i) \wedge \mathsf{G}\varphi) \tag{1}$$

   Quelle est la complexité de cette traduction ?

2. Donner une formule utilisant des sous-formules de la forme (1) et des modalités EX équivalente à

$$\mathsf{E}(\mathsf{X}\varphi \wedge \bigwedge_{i=1,\ldots,n}(\psi_i \,\mathsf{U}\, \psi'_i) \wedge \mathsf{G}\varphi') \tag{2}$$

   Quelle est la complexité de cette traduction ?

3. Il ne reste pour conclure à nous ramener à des disjonctions (potentiellement imbriquées) de formules sous la forme (2) à partir de n'importe quelle formule CTL$^+$. Détailler cette conversion dans le cas de la formule

$$\mathsf{A}((\mathsf{F}a \vee \mathsf{X}a \vee \mathsf{X}\neg b \vee \mathsf{F}\neg d) \wedge (d \,\mathsf{U}\, \neg c))$$

2 LTL et RELTL

2.1 Propriété non exprimable en LTL

Pour une propriété atomique p, on considère la séquence infinie $\sigma_i = \Sigma_p^i \Sigma_{\neg p} \Sigma_p^\omega$.

1. Montrer que pour tout formule LTL(X, U) φ_n avec moins de n modalités X, la satisfiabilité de φ_n est la même pour toutes les séquences σ_i avec $i > n$.

2. Pour $m \geq 2$, montrer que la propriété

   « p est vraie dans tous les états s_i tels que $i = km$ pour un certain $k \geq 0$ » (3)

   n'est pas exprimable en LTL(X, U).

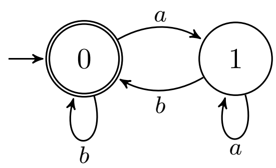
2.2 RELTL

On définit la logique linéraire RELTL par la syntaxe abstraite

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid L.\varphi$$

où L est un langage rationnel sur Σ^*, présenté sous la forme d'une expression rationnelle sur Σ. La sémantique est que $\sigma \models L.\varphi$ ssi $\sigma = u\sigma'$ avec $u \in L$ et $\sigma' \models \varphi$. On souhaite montrer que RELTL permet d'exprimer la propriété (3) précédente.

1. Considérer tout d'abord l'automate de Büchi suivant :

   Un mot de $\{a, b\}^\omega$ n'appartient pas au langage de cet automate si et seulement s'il ne contient qu'un nombre fini de symboles a. Exploiter cette intuition pour écrire une formule RELTL équivalente à l'automate.
2. Donner un automate de Büchi déterministe et complet $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, i, F, \delta \rangle$ pour la propriété (3).
3. Pour chaque état s de $\mathcal{A}$, on note M_s le langage $\{u \in \Sigma^* \mid \delta(i, u) = s\}$ et N_s le langage $\{v \in \Sigma^* \mid \delta(s, v) \in F\}$. Comment exprimer le complémentaire de $L(\mathcal{A})$ à l'aide des langages M_s et N_s ?
4. En déduire une formule RELTL pour la propriété (3).