Automates finis et expressions rationnelles

Exercice 1 (De l'automate à l'expression rationnelle)

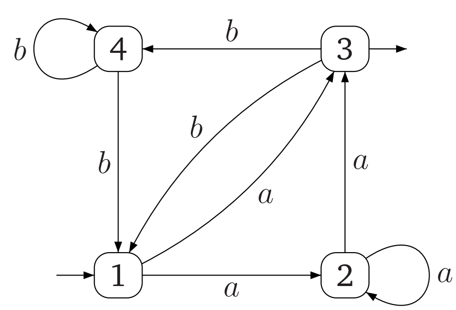
1. Montrer le lemme d'Arden :
   Soit $P, R \subseteq A^*$, $\varepsilon \notin P$, alors l'équation $X = PX + R$ admet comme unique solution P^*R.
2. Montrer que si $\forall i, j \quad \varepsilon \notin P_{i,j}$ alors le système suivant admet une unique solution pour laquelle chaque X_i appartient à $Rat\{P_{i,j}, R_i\}$:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = P_{1,1}X_1 + \cdots + P_{1,n}X_n + R_1\\
&\vdots\\
&X_n = P_{n,1}X_1 + \cdots + P_{n,n}X_n + R_n
\end{aligned}
$$

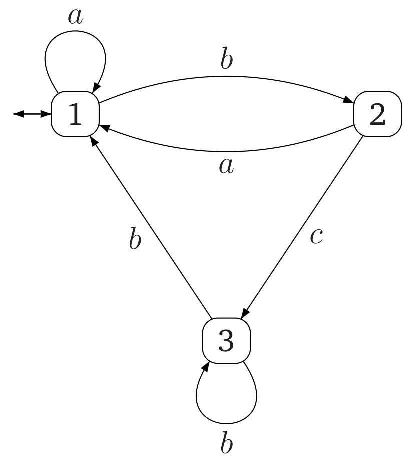
3. À partir d'un automate fini, expliquer comment construire un système d'équations dont les solutions sont les langages reconnus à partir de chacun des états.

Exercice 2 (Calcul d'expressions rationnelles)

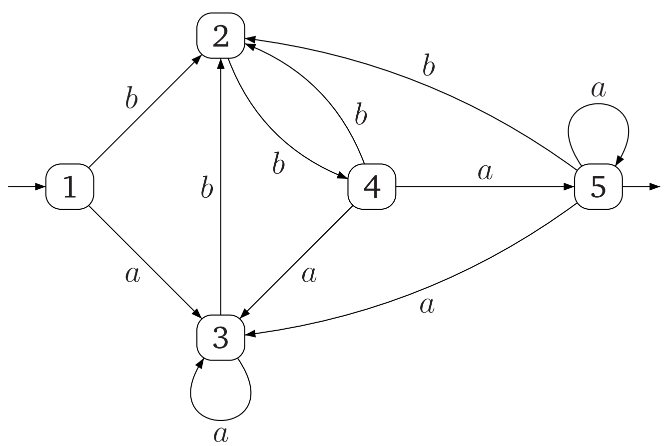
1. Trouver « à l'oeil » une expression rationnelle pour l'automate suivant :



2. Appliquer l'algorithme de McNaughton et Yamada à l'automate ci-dessous.
   De même avec l'algorithme de Brzozowski et McCluskey.



3. Appliquer la méthode de l'exercice 1 à l'automate suivant :



Exercice 3 (De l'expression rationnelle à l'automate)

1. Donner un algorithme permettant de construire un automate associé à une expression rationnelle.
2. Appliquer cet algorithme pour l'expression $(a(ab)^*)^*$.

Exercice 4 (Langages locaux, algorithme de Glushkov)
Un langage L sur A est dit *local* s'il existe des parties P et S de A et une partie N de A^2 telles que $L \backslash \{1\} = PA^* \cap A^*S \setminus A^*NA^*$.
Un automate déterministe $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ sur A est dit local si pour tout $a \in A$, $\{q.a \mid q \in Q\}$ a au plus un élément.

1. Montrer qu'il existe des langages reconnaissables qui ne sont pas locaux.
2. Montrer que tout langage reconnaissable est l'image par un morphisme strictement alphabétique (c'est-à-dire que l'image d'une lettre est de longueur 1) d'un langage local.
3. Montrer que tout langage local est reconnu par un automate fini ayant $|A| + 1$ états.
4. Montrer qu'un langage est local si et seulement s'il est reconnu par un automate local.
5. Montrer que si L est local alors L^* est local.
   Montrer que si L_1 et L_2 sont des langages locaux sur des alphabets disjoints alors $L_1 \cup L_2$ et L_1L_2 sont des langages locaux.
6. Soit L un langage, on définit $P(L) = \{a \in A \mid aA^* \cap L \neq \emptyset\}$, $S(L) = \{a \in A \mid A^*a \cap L \neq \emptyset\}$, $F(L) = \{x \in A^2 \mid A^*xA^* \cap L \neq \emptyset\}$.
   Soit L un langage local, montrer que
   $$L = P(L)A^* \cap A^*S(L) \setminus A^*F(L)^cA^*.$$
   Donner un algorithme pour calculer $P(L), S(L)$ et $F(L)$ à partir d'une expression rationnelle représentant L.
7. Une expression rationnelle est dite *linéaire* si chaque lettre a au plus une occurence dans l'expression. Montrer qu'une expression linéaire représente un langage local.
8. En déduire un algorithme pour construire un automate à partir d'une expression rationnelle (linéaire ou non). Comparer avec l'algorithme naïf.
9. Appliquer cet algorithme à l'expression rationnelle $(a(ab)^*)^*$.

Exercice 5 (Théorème de Brzozowski)
E, F, G désignent des expressions rationnelles.

1. Si $a \in A$ exprimer en fonction de $a^{-1}E$ et $a^{-1}F$ les expressions suivantes : $a^{-1}(E + F)$, $a^{-1}(E.F)$, $a^{-1}E^*$.
2. En déduire une méthode (éventuellement ne terminant pas toujours) pour construire un automate déterministe à partir d'une expression rationnelle.
3. Appliquer cette méthode à l'expression $(a + b)^*ab(a + b)^*$.

4. Obtient-on toujours l'automate minimal associé à l'expression rationnelle ?
5. On considère les identités entre expression rationnelles suivantes $E + E = E$, $E + F = F + E$ et $(E + F) + G = E + (F + G)$.
   On note $nd(E)$ le nombre de résiduels de E modulo ces identités.
   Montrer que $nd(E + F) \leq nd(E)nd(F)$, $nd(E.F) \leq nd(E)2^{nd(F)}$ et $nd(E^*) \leq 2^{nd(E)}$.
6. En déduire un algorithme pour construire un automate déterministe à partir d'une expression rationnelle.