Probablités (3)

MP– SEMAINE 17

1 Probabilités

▪ **387** ▪ TAGS : mp | proba | majoration |
Exercice 1 *(Moments et contrôle).*
Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre p. Montrer

$$\mathbb{P}(X \geq n) = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \tag{1}$$

Indication : Reste de série convergente

▪ **386** ▪ TAGS : mp | proba | sommealea |
Exercice 2 *(Somme aléatoire).*
On considère X_n une suite de variid à valeur dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$.
On pose $Z = \sum_{n\geq 1}^{N} X_n$.

1. Quelle est la série génératrice G_X ?
2. Calculer la série génératrice G_Z
3. Dans le cas où N est constante, quelle est l'espérance de Z ? Comment généraliser cette formule ?
4. Quel est le lien entre G'_Z et l'espérance de Z ?
5. Calculer G'_Z, en déduire une formule pour l'espérance de Z si N et X ont une espérance.

▪ **384** ▪ TAGS : mp | proba | bernstein | polynome | esperance |
Exercice 3 *(Polynômes de Bernstein).*
Soit f une fonction dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
Soit $x \in [0,1]$. On pose X_n une suite de variid suivant une loi $B(x)$
On pose alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

1. Quelle est la loi de S_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. Donner une expression sous forme de polynôme en x de $\mathbb{E}(f(S_n/n))$
3. Donner une inégalité majorant la probabilité que S_n/n soit éloigné de x
4. Montrer que f est uniformément continue
5. En déduire une majoration indépendante de x pour l'expression suivante

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \tag{2}$$

Indication : Découper en fonction de l'écart entre S_n/n et x

6. Conclure que la suite de polynômes donné question 2 converge uniformément vers f.
7. Comment généraliser le résultat ?

▪ **385** ▪ TAGS : mp | proba | lgn |

Exercice 4 *(Loi des grands nombres).*

On considère une suite X_n de variid d'espérance nulle et toutes *bornées* par une constante C.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left[t(S_n - n\varepsilon)\right] \geq 1\right) + \mathbb{P}\left(\exp\left[t(S_n + -n\varepsilon)\right] \leq 1\right) \tag{3}$$
2. Montrer que pour tout $t > 0$
$$\mathbb{P}\left(\exp\left[t(S_n - n\varepsilon)\right] \geq 1\right) \leq e^{-n\varepsilon t}\left(\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right)\right)^n \tag{4}$$
3. En utilisant la convexité de l'expenentielle, montrer que pour $x \in [-C, C]$ on a
$$e^{tx} \leq u_x e^{-tC} + (1 - u_x)e^{tC} \tag{5}$$
Pour un u_x que l'on déterminera
4. En déduire
$$\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) \leq \cosh(Ct) \tag{6}$$
Indication : Où se trouve X_1 presque sûrement ?
5. Montrer l'inégalité suivante
$$\cosh t \leq e^{t^2/2} \tag{7}$$
Indication : DSE
6. En déduire une majoration de la forme
$$\mathbb{P}\left(\exp\left[t(S_n - n\varepsilon)\right] \geq 1\right) \leq e^{f(t)} \tag{8}$$
Où f dépend de C, de n et de ε.
7. Minimiser f afin d'obtenir une majoration la plus fine possible
8. En déduire
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2C^2}} \tag{9}$$
9. On pose
$$A_{n,q} = \left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \frac{1}{q}\right\} \tag{10}$$
Et
$$B_q = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_{n,q} \tag{11}$$
Montrer que $\mathbb{P}(B_q) = 0$ pour tout $p \geq 1$
10. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$
11. Que vient-on de démontrer ?

2 Réduction

■ **334** ■ TAGS : mp | lineaire | algebre |
Exercice 5 *(Diagonale Dominante).*
On considère une matrice A à coefficients dans $\mathbb{C}$ véifiant

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{1\leq j\neq i\leq n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}| \tag{12}$$

1. Interpréter la formule en terme de diagonale
2. Montrer que A est inversible
3. On appelle valeur propre de A un λ tel que $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Montrer qu'il y a un nombre fini de valeurs propres.

   Indication : Utiliser les dimensions... Ou connaître le cours
4. Montrer que les valeurs propres (complexes) de A sont contenues dans une union de disques dont on précisera les centres et rayons.

■ **389** ■ TAGS : mp | reduction | matrice | polynome | caracteristique |
Exercice 6 *(Valeurs propres et produit de Kronecker).*
On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix} (= A_1 \otimes A_n) \tag{13}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A_n pour tout $n \geq 1$
2. Calculer le déterminant de A_n
3. Déterminer la trace de A_n
4. Quel est le rang de A_n ?

■ **390** ■ TAGS : mp | reduction | suite | kronecker | diagonalisabilite |
Exercice 7 *(Diagonalisabilité d'un produit de kronecker).*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 1$ montrer que la matrice B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \tag{14}$$

Indication : Que dire des polynômes en B ?

■ **391** ■ TAGS : mp | reduction | nilpotente |
Exercice 8 *(Matrice nilpotente strictement positive).*
Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente a coefficients strictements positifs ?

▪ **392** ▪ TAGS : mp | reduction | kronkecker | polynome |
Exercice 9 *(Théorème de Kronecker).*

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et de degré n. Existe-t-il une matrice M à coefficients entiers dont le polynôme caracrésitique est P ?
2. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers avec pour racines $(\lambda_i)_i$ comptées avec multiplicité. Considérons $q \geq 1$
   Montrer que le polynôme suivant est à coefficients entiers
   $$P_q = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^q) \tag{15}$$
3. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers dont toutes les racines sont de module inférieur à 1.
   — Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes P_q
   — En déduire que les racines de P non nulles sont des racines de l'unité.

▪ **393** ▪ TAGS : mp | spectre | reduction | operateurs |
Exercice 10 *(Une équation matricielle).*

1. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on pose
   $$\sin(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \tag{16}$$
   Justifier l'existence d'une telle matrice
2. Calculer $\sin A$ dans le cas où A est diagonalisable
3. Justifier que $\cos A$ et $\exp A$ sont définies de la même manière.
4. Montrer que $\exp(iA) = \cos A + i \sin A$
5. En déduire $\cos^2 A + \sin^2 A = I_2$
6. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant l'égalité suivante ?
   $$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$
   Indication : Que vaut $\cos^2 A$ *? Pourquoi est-ce absurde ?*