Espaces Vectoriels

1 Exercices basiques

Exercice 1 *(Identification)*. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$$

Exercice 2 *(Espace des suites)*.
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$?

1. L'ensemble des suites bornées
2. L'ensemble des suites périodiques
3. L'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
4. L'ensemble des suites convergentes

Exercice 3 *(Espace des fonctions)*.
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. L'ensemble des fonctions continues
2. L'ensemble des fonctions paires
3. L'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 0$

Exercice 4 *(Un peu d'algèbre)*.
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Sur quel corps ?

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des couples $a + \sqrt{2}b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des couples $a + \sqrt{2}b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$

2 Exercices acides

Exercice 5 *(Intersection et somme)*. Comparer $F \cap (G + H)$ et $F \cap G + F \cap H$

Exercice 6 *(Changement de corps)*.
On considère $z \in \mathbb{C}$, et $\mathbb{R}z = \{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Est-ce que $\mathbb{R}z$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?
2. Est-ce que $\mathbb{R}z$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Exercice 7 *(Liberté dans les fonctions)*.
Montrer que la famille suivante est libre : $f_a : x \mapsto |x - a|$

Exercice 8 *(Isomorphismes en dimension finie)*.

1. Soit E un k-espace vectoriel de dimension n, montrer que E est isomorphe à k^n.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux espaces vectoriels de dimension finie soient isomorphes.

Exercice 9 *(Supplémentaires).*

1. Si F et G possèdent un supplémentaire commun dans E, montrer que F et G sont isomorphes

   Indication: Considérer une projection...

2. On suppose F et G isomorphes, on veut montrer la réciproque du (1) quand E est de dimension finie.

   (a) Que dire de leur dimension ?

   (b) Conclure dans le cas où $\dim F = \dim E$

   (c) Conclure dans le cas où F et G sont des hyperplans de E

   (d) En déduire une preuve par récurrence sur la codimension de F

3. Montrer que la réciproque est fausse en dimension infinie

   Indication: Considérer $E = k[X]$, $F = E$, $G = XE$...

Exercice 10 *(Suite exacte).*
On dit qu'une suite $E_1 \to_{f_1} E_2 \to \cdots \to_{f_n} E_{n+1}$ est *exacte* si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f)_i = \ker f_{i+1}$ pour chaque f_i.

1. On considère la suite exacte $\{0\} \to_f A \to_g B \to_h C \to_k \{0\}$. Montrer que

$$\dim B = \dim C + \dim A$$

   Indication: Utiliser le théorème du rang

2. On considère une suite

$$\{0\} \to_{f_0} \to E_1 \to \cdots \to_{f_n} \to \{0\}$$

   Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

   Indication: On utilisera le théorème du rang ...