# Polynômes

**Exercice 1** *(Tcheby mon amour)*.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.
2. En déduire une expression de $\cos(n\theta)$ (resp. $\sin(n\theta)$) en fonction de $\cos(\theta)$ (resp. $\cos(\theta)$)
3. Montrer que $\cos(n\theta)$ est un polynôme de degré $n$ en $\cos(\theta)$ que l'on note $T_n$
4. Calculer les racines de $T_n$
5. Calculer les maxima et minima $x \mapsto T_n(x)$ sur $[-1, 1]$

**Exercice 2** *(Warmup)*. Montrer que $P$ est à racine simples dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(P, P') = 1$

**Exercice 3** *(Division euclidienne)*. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X \cos t + \sin t)^n$ par $X^2 + 1$.

*Indication: Évaluer en i ...*

**Exercice 4** *(Rolle)*. Soit $P$ un polynôme réel de degré $n + 1$ scindé à racines simples.
(i) Montrer que $P'$ est scindé à racines simples.
(ii) En déduire que $P^2 + 1$ n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$

*Indication: Les racines de P et P′ sont réelles ...*

**Exercice 5** *(Utilisation des racines)*. On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$
(i) *(indépendante)* Quel est le nombre maximal de racines pour un polynôme de degré $n$ ?
(ii) Si $a$ est une racine de $P$, en déduire que $a$ est soit nul, soit une racine de l'unité
(iii) Montrer qu'en réalité $a \in \{0, 1, -j, -j^2\}$
(iv) En déduire la forme des solutions de l'équation

*Indication: On admettra que tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$*

**Exercice 6** *(Équations dans l'anneau des polynômes)*.
Résoudre les équations suivantes
(i) $P^2 = XQ^2$ avec $P, Q$ dans $k[X]$
(ii) $P \circ P = P$ avec $P$ dans $k[X]$

**Exercice 7** *(Décomposition en base 2)*. On pose

$$P_n(X) = (1 + X)(1 + X^2) \dots (1 + X^{2^n})$$

(i) Simplifier l'expression $(1 - X)P_n(X)$
(ii) En déduire une expression simple de $P_n(X)$
(iii) À quoi correspond le coefficient devant le terme $X^k$ dans $P_n(X)$ ?
(iv) En déduire l'existence et l'unicité de la décomposition en base 2

**Exercice 8** *(Racines de l'unité).* Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ dans $\mathbb{C}[X]$. On pose $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$ .

(i) Montrer que $M$ est fini

(ii) On pose $\omega$ une racine primitive $n+1$-ème de l'unité. Calculer pour tout $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \omega^{kl}$$

(iii) En déduire l'expression de

$$P(1) + P(\omega) + \cdots + P(\omega^n)$$

(iv) Conclure que $(n+1)|a_0| \leq M$

(v) Est-il possible de montrer que $(n+1)|a_k| \leq M$ ?

*Indication:* $\sum \omega^{-kl} P(\omega^l) = \ldots$

**Exercice 9** *(Utilisation des formules de Newton).*
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathsf{C}$ pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

**Exercice 10** *(Racines de l'unité).* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Former la décomposition en polynômes irréductibles de $P_n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

   *Indication: Somme géométrique ...*

2. Calculer la valeur de $P_n$ en $1$
3. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

**Exercice 11** *(Arithmétique des polynômes).* Soit $(A, B) \in (\mathbb{C}[X])^2$ non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A$ et $B$ ne sont pas premiers entre eux.

(ii) il existe $(U, V) \in (\mathbb{C}[X] - \{0\})^2$ tel que

$$AU + BV = 0, \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A$$

**Exercice 12** *(Factorisation).* On pose $P_n = (X+i)^n - (X-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines de $P_n$
2. Factoriser $P_n$

**Exercice 13** *(Famille de polynômes).* Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de $\mathbb{C}[X]$ définie par

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_nP_{n+2}$$
2. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont premiers entre eux}$$
3. Établir pour que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$P_{m+n} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m$$
4. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\operatorname{pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \operatorname{pgcd}(P_n, P_m)$$
   En déduire que $\operatorname{pgcd}(P_m, P_n) = \operatorname{pgcd}(P_n, P_r)$ où $r$ est le reste de la division euclidienne de $m$ par $n$.
5. Conclure
$$\operatorname{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\operatorname{pgcd}(m,n)}$$