# Calcul différentiel
# Éléments propres d'un endomorphisme

## 1 Calcul différentiel

**▪ 341 ▪**
**Exercice 1** *(Identité d'Euler).*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ et $\alpha > 0$.

1. Supposons $f(tu) = t^\alpha f(u)$ pour tout $t > 0$.
   Montrer que $f$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante
   $$\Phi(f) =^{def} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f \tag{1}$$
2. Supposons $\Phi(f) = \alpha f$. On fixe $u \in \mathbb{R}^2$ et on pose $h(t) = t^{-\alpha} f(tu)$.
   (a) Quelle est la régularité de $h$ ?
   (b) Calculer $h'(t)$
   (c) Conclure $f(tu) = t^\alpha f(u)$ pour tout $t > 0$
3. Montrer que $\Phi$ est une application linéaire de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vers $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
4. Déterminer le noyau de $\Phi$
5. Montrer que $\Phi$ est surjective ? ?

**▪ 343 ▪**
**Exercice 2** *(Fonctions radiales).*
On considère l'application linéaire suivante
$$\Phi(f) = y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

1. Donner un espace vectoriel d'arrivée et de départ pour cette application
2. On cherche à résoudre $\Phi(f) = 0$. Faire une interprétation géométrique, en déduire un changement de coordonnées à essayer.
3. Soit $f$ de classe $C^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On pose
   $$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{3}$$
   Calculer les dérivées partielles de $g$ en fonction de celles de $f$
4. Montrer que si $\Phi(f) = 0$ alors $g(r, \theta)$ ne dépend que de $r$.
5. En déduire les solutions de $\Phi(f) = 0$.

▪ **342** ▪

**Exercice 3** *(Régularité d'une fonction).*

$$f(u) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|u\|_2^2}} & \text{si } \|u\| \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$

Montrer que $f$ est une fonction $C^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

▪ **347** ▪

**Exercice 4** *(Un petit théorème de Poincaré).*
Soient $f, g$ deux fonctions $C^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

1. Supposons qu'il existe $h$ tel que $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$.
   Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$
2. Réciproquement
   (a) Justifier qu'on peut supposer que $f(x, 0) = 0$ et $g(0, y) = 0$.
   (b) Proposer une solution au système
   (c) Justifier que c'est bien une solution

▪ **348** ▪

**Exercice 5** *(Lois de groupe sur $\mathbb{R}$).*
On pose $f(x, y) = x \star y$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose de plus que $f$ est une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ avec comme élément neutre $e$.

1. Énoncer l'associativité de $f$
2. Montrer que pour tout $x, y, z$ on a
$$(\partial_2 f)(x \star y, z) = (\partial_2 f)(x, y \star z) \times (\partial_2 f)(y, z) \tag{5}$$
3. En déduire que $(\partial_2 f)(y, e) > 0$
   *Indication: Appliquer en $y^{-1}, y, e$ l'égalité précédente...*
4. Supposons qu'il existe $\phi$ de classe $C^1$ telle que
$$\phi(x \star y) = \phi(x) + \phi(y) \tag{6}$$
   Montrer en dérivant en $y$ qu'on a nécessairement une constante $a$ telle que
$$\phi(x) = a \int_e^x \frac{dt}{(\partial_2 f)(t, e)} \tag{7}$$
   *Indication: $\phi(e) = 0$, dériver l'égalité par rapport à $y$ et appliquer en $y = e$*
5. Réciproquement, montrer que si $a \neq 0$ alors l'égalité précédente définit un *difféomorphisme* $C^1$ de $I$ vers $\phi(I)$.
6. Vérifier que ce difféomorphisme vérifie $\phi(x \star y) = \phi(x) + \phi(y)$.
7. Montrer que $I = \phi(I) = \mathbb{R}$

▪ **349** ▪
**Exercice 6** *(Fonctions coercives et gradient).*
Soit $f$ une fonction coercive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qui vérifie

$$\frac{f(x)}{\|x\|} \to +\infty \qquad \|x\| \to +\infty \tag{8}$$

1. Montrer qu'une telle fonction possède un minimum global
2. En déduire qu'il existe un $u$ tel que $\nabla f(u) = 0$
3. Soit $v \in \mathbb{R}^2$, montrer que $f - \langle v|\cdot\rangle$ vérifie les mêmes hypothèses que $f$.
4. En déduire que $\nabla f$ est surjective.

# 2 Éléments propres

▪ **334** ▪
**Exercice 7** *(Diagonale Dominante).*
On considère une matrice $A$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ véifiant

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{1 \leq j \neq i \leq n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}| \tag{9}$$

1. Interpréter la formule en terme de diagonale
2. Montrer que $A$ est inversible
3. On appelle valeur propre de $A$ un $\lambda$ tel que $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Montrer qu'il y a un nombre fini de valeurs propres.

   *Indication: Utiliser les dimensions... Ou connaître le cours*

4. Montrer que les valeurs propres (complexes) de $A$ sont contenues dans une union de disques dont on précisera les centres et rayons.

▪ **344** ▪
**Exercice 8** *(Inverse d'une matrice).*
Soit $M$ une matrice carrée inversible, montrer que $M^{-1}$ est un polynôme en $M$.

*Indication: Considérer $\chi_M$*

▪ **345** ▪
**Exercice 9** *(Commutant d'un endomorphisme (facile)).*
Soit $M$ une matrice carrée. On pose $\Gamma_M = \{A \mid AM = MA\}$.
Supposons $M$ diagonalisable, calculer $\Gamma_M$.

■ **346** ■

**Exercice 10** *(Valeur propre commune).*
Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées.

1. Soit $P \neq 0$ tel que $AP = PB$, montrer que $A$ et $B$ ont une valeur propre commune
   Sous questions :
   (a) Que dire des polynômes en $A$ et en $B$ ?
   (b) Quel est le lien entre valeurs propres et racines de polynômes ?
   (c) Quelle est l'écriture factorisée du polynôme caractéristique ?
   (d) En déduire que $(B - \lambda_i I)$ est non inversible pour un certain $i$
2. Montrer la réciproque
   Sous questions :
   (a) Soit $v, \lambda$ un élément propre commun à $A$ et $B$, décomposer l'espace en somme directe.
   (b) Définir $P$ sur la décomposition de manière à ce que $Pv = v$ et $Px = 0$ autrement
   (c) Conclure que $P$ convient.