

Polynômes

Exercice 1 (*Tcheby mon amour*).

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.
2. En déduire une expression de $\cos(n\theta)$ (resp. $\sin(n\theta)$) en fonction de $\cos(\theta)$ (resp. $\cos(\theta)$).
3. Montrer que $\cos(n\theta)$ est un polynôme de degré n en $\cos(\theta)$ que l'on note T_n .
4. Calculer les racines de T_n .
5. Calculer les maxima et minima $x \mapsto T_n(x)$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 2 (*Warmup*). Montrer que P est à racine simples dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement si $\text{pgcd}(P, P') = 1$.

Exercice 3 (*Division euclidienne*). Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X \cos t + \sin t)^n$ par $X^2 + 1$.

Indication: Évaluer en $i \dots$

Exercice 4 (*Rolle*). Soit P un polynôme réel de degré $n + 1$ scindé à racines simples.

- (i) Montrer que P' est scindé à racines simples.
- (ii) En déduire que $P^2 + 1$ n'a pas de racine multiple dans \mathbb{C} .

Indication: Les racines de P et P' sont réelles ...

Exercice 5 (*Utilisation des racines*). On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

- (i) (*indépendante*) Quel est le nombre maximal de racines pour un polynôme de degré n ?
- (ii) Si a est une racine de P , en déduire que a est soit nul, soit une racine de l'unité.
- (iii) Montrer qu'en réalité $a \in \{0, 1, -j, -j^2\}$.
- (iv) En déduire la forme des solutions de l'équation.

Indication: On admettra que tout polynôme est scindé sur \mathbb{C}

Exercice 6 (*Équations dans l'anneau des polynômes*).

Résoudre les équations suivantes

- (i) $P^2 = XQ^2$ avec P, Q dans $k[X]$
- (ii) $P \circ P = P$ avec P dans $k[X]$

Exercice 7 (*Décomposition en base 2*). On pose

$$P_n(X) = (1 + X)(1 + X^2) \dots (1 + X^{2^n})$$

- (i) Simplifier l'expression $(1 - X)P_n(X)$.
- (ii) En déduire une expression simple de $P_n(X)$.
- (iii) À quoi correspond le coefficient devant le terme X^k dans $P_n(X)$?
- (iv) En déduire l'existence et l'unicité de la décomposition en base 2.

Exercice 8 (*Racines de l'unité*). Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ dans $\mathbb{C}[X]$. On pose $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

- (i) Montrer que M est fini
- (ii) On pose ω une racine primitive $n + 1$ -ème de l'unité. Calculer pour tout $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \omega^{kl}$$

- (iii) En déduire l'expression de

$$P(1) + P(\omega) + \dots + P(\omega^n)$$

- (iv) Conclure que $(n + 1)|a_0| \leq M$
- (v) Est-il possible de montrer que $(n + 1)|a_k| \leq M$?

Indication: $\sum \omega^{-kl} P(\omega^l) = \dots$

Exercice 9 (*Utilisation des formules de Newton*).

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double d'une autre. Résoudre alors l'équation.

Exercice 10 (*Racines de l'unité*). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$.

1. Former la décomposition en polynômes irréductibles de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

Indication: Somme géométrique ...

2. Calculer la valeur de P_n en 1
3. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 11 (*Arithmétique des polynômes*). Soit $(A, B) \in (\mathbb{C}[X])^2$ non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A et B ne sont pas premiers entre eux.
- (ii) il existe $(U, V) \in (\mathbb{C}[X] - \{0\})^2$ tel que

$$AU + BV = 0, \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A$$

Exercice 12 (*Factorisation*). On pose $P_n = (X + i)^n - (X - i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines de P_n
2. Factoriser P_n

Exercice 13 (*Famille de polynômes*). Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite de $\mathbb{C}[X]$ définie par

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$$

2. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont premiers entre eux}$$

3. Établir pour que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m$$

4. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\text{pgcd}(P_{m+n}, P_n) = \text{pgcd}(P_n, P_m)$$

En déduire que $\text{pgcd}(P_m, P_n) = \text{pgcd}(P_n, P_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n .

5. Conclure

$$\text{pgcd}(P_n, P_m) = P_{\text{pgcd}(m,n)}$$