Séries entières

▪ 315 ▪

Exercice 1 *(Involutions).*
Soit $n \geq 1$, on notera I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$ et $I_0 = 1$ par convention.

1. Montrer que $\forall n, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$
2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est supérieur à 1. Notons S sa somme.
3. Déterminer une équation différentielle linéaire dont S est la solution.
4. En déduire une expression de S puis de I.

▪ 316 ▪

Exercice 2 *(Un théorème de Liouville).*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

1. Montrer que pour $0 < r < R$ on a

$$\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \tag{1}$$

2. Que dire de f lorsque $|f|$ admet un maximum local en 0 ?
3. On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe un polynôme réel P vérifiant

$$|f(z)| \leq P(|z|) \tag{2}$$

   Montrer que f est un polynôme de degré inférieur à P.

▪ 317 ▪

Exercice 3 *(Nombres de catalan).*
On note $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k$.

1. Donner une formule permettant de calculer $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
2. Déterminer a_n
3. Donner un équivalent de la suite a

▪ **318** ▪

Exercice 4 *(Un théorème de Bernstein).*
Soit f une fonction C^{∞}

1. Est-il vrai que f est développable en série entière au voisinage de zéro ?
2. On suppose maintenant que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout n.
   (a) Montrer que $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du$
   (b) Montrer que $R_n(x) \leq f(x)$
   (c) Montrer que si $|x| < y$ alors $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y)$
   (d) En déduire que f est développable en série entière
3. On suppose maintenant que $f^{(2n)} \geq 0$ pour tout n. On pose $S_n = \sum_{k \leq n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
   (a) En utilisant $F(x) = f(x) + f(-x)$, déduire que $\lim S_{2n+1}(x) = f(x)$
   (b) Montrer que $\lim S_{2n}(0) - S_{2n-1}(0) = 0$.
   (c) En déduire que f est développable en série entière

▪ **319** ▪

Exercice 5 *(Produit de Hadamard).*
Considérons deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergences R_1 et R_2.

1. Montrer que la série $\sum a_n b_n z^n$ est de rayon de convergence $R \geq R_1 R_2$
2. Montrer qu'il n'y a pas toujours égalité

Indication: Séries lacunaires

▪ **320** ▪

Exercice 6 *(Une étude au bord).*
Donner le domaine de définition et étudier le comportement au bord du disque de convergence de la série entière suivante

$$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \tag{3}$$

▪ **321** ▪

Exercice 7 *(Le théorème d'Hadamard).*
On suppose que (a_n) est une suite bornée de $\mathbb{C}$ et on note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
Montrer que $1/R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$