Intégrales dépendant d'un paramètre / Séries entières

▪ **303** ▪

Exercice 1 *(Calcul de l'intégrale de Gauss).*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \qquad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \tag{1}$$

(a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de F' et G'

(b) Montrer que $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$

(c) Déterminer la limite de $F(x)$ en $+\infty$

(d) En déduire la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \tag{2}$$

▪ **304** ▪

Exercice 2 *(Équivalent d'une intégrale à paramètre).*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \tag{3}$$

(a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier sa continuité

(b) Calculer $f(x) + f(x+1)$

(c) Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

▪ **302** ▪

Exercice 3 *(Transformée de Fourier Gaussienne).*

Déterminer une expression simple de

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{itx} dt \tag{4}$$

▪ **257** ▪

Exercice 4 *(Calcul d'une intégrale (03656)).*

(a) Justifier l'existence de

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{ch}(2xt) dt \tag{5}$$

(b) Calculer directement F en utilisant une permutation série-intégrale.

(c) Introduire une équation différentielle vérifiée par F et en déduire une expression simple de F.

▪ 248 ▪
Exercice 5 *(Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet (2872)).*
On pose

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \tag{6}$$

(a) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$

Indication: On admet la convergence de l'intégrale de Dirichlet

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

(c) En déduire une expression de f sur $\mathbb{R}_+^*$

(d) Justifier que f est continue en zéro.

Indication: Découpe en $n\pi$, $(n+1)\pi$ et série alternée

(e) En déduire la valeur de l'intégrale de dirichlet.

▪ 246 ▪
Exercice 6 *(Série d'intégrales (1102)).*
On pose

$$U_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n} \qquad V_n = \int_1^{\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} \tag{7}$$

(a) Donner les limites éventuelles des suites U_n et V_n

(b) Étudier la nature des séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$.

Indication: Pour U_n, par l'absurde et Fubini

▪ **312** ▪

Exercice 7 *(Transformée de Laplace).*
Pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on pose

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt \tag{8}$$

(a) Montrer si a est dans le domaine où $\mathcal{L}(f)$ converge absolument alors tout $b \geq a$ l'est aussi.

(b) Calculer $\mathcal{L}(f)$ quand $f(t) = e^{at}$

(c) Supposons que f soit continue et bornée. Montrer que quand $x \to +\infty$

$$x\mathcal{L}(f)(x) \to f(0) \tag{9}$$

(d) Sous les mêmes hypothèses, et en supposant que $f(t) \to l$ quand $t \to +\infty$. Montrer que quand $x \to 0$

$$x\mathcal{L}(f)(x) \to l \tag{10}$$

(e) Interpréter géométriquement la répartition de masse de xe^{-xt} et conclure sur la nature des résultats précédents.

(f) Calculer la transformée de t^α

Indication: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-s}s^{\alpha-1}ds$

(g) En déduire un lien informel entre les développements limités de f en zéro et les développements asymptotiques de $\mathcal{L}(f)$ en $+\infty$.

(h) En supposant que $\int_0^\infty f(t)dt$ existe et que f est continue.

— Montrer que si F est une primitive de f s'annulant en 0 alors $x\mathcal{L}(F)(x) = \mathcal{L}(f)(x)$ quand $x > 0$.

— En déduire que sa transformée est définie pour tout $x \in [0, +\infty[$.

— Montrer que sa transformée est continue sur $]0, +\infty[$

— Montrer que sa transformée est continue en 0

Indication: On a des résultats asymptotiques ...

▪ **313** ▪

Exercice 8 *(Un théorème de division).*
Soit f infiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans lui-même avec $f(0) = 0$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Montrer qu'il existe g infiniment dérivable telle que $f(x) = x^r g(x)$.

Indication: Taylor Reste Intégral...

▪ **314** ▪

Exercice 9 *(Convolution perturbée)*.

On note E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds \tag{11}$$

1. Montrer que $(E, +, \star, \cdot)$ est une $\mathbb{C}$ algèbre
2. Cette algèbre possède-t-elle un élément neutre pour $\star$?

   Indication: Que dire que $e \star \bar{e}$ et $e \star 1$
3. Montrer que $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$
4. Montrer que pour $f \in E$, on a
$$(\|f^n\|_\infty)^{1/n} \to 0 \tag{12}$$
   Où f^n représente $f \star \cdots \star f$.

   Indication: Majorer f^n par un polynôme en t
5. Que dire d'un morphisme d'algèbre de E dans $\mathbb{C}$ qui soit continu ?

   Indication: Montrer qu'il est nul ...