Topologie

1 Espaces vectoriels normés

Exercice 1 *(Égalité triangulaire).*
Soit E un espace euclidien et $f : [a,b] \to E$ une fonction continue.
On suppose que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(x)\| dx \tag{1}$$

Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que on ait pour tout $t \in [a,b]$ on ait $f(t) = \|f(t)\| \cdot e$.

Exercice 2 *(Séries et convergence).*
Soit E un espace vectoriel normé.
Une suite (u_n) est dite de Cauchy dans E si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq m, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon \tag{2}$$

On dit que E est complet si toute suite de Cauchy de E possède une limite dans E.

1. Montrer que E est un espace complet si et seulement si toute série de E qui converge normalement possède une limite.
2. Donner un exemple d'espace non complet (penser aux espaces de fonction).

Exercice 3 *(Comparaison de normes (465)).*
Considérons $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et $N : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'(t)^2 dt} \tag{3}$$

(a) Montrer que N est une norme sur E

(b) Comparer N et $\|\|_\infty$.

Indication: Que dire pour $f(x) = \sin(n\pi x)$?

Exercice 4 *(Norme sur les polynômes (473)).*
Sur $\mathbb{R}[X]$ on pose N_1 et N_2 comme suit

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(0)| \tag{4}$$

$$N_2(P) = \sup_{-1 \leq t \leq 1} |P(t)| \tag{5}$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes

(b) Étudier pour ces deux normes la convergence de la suite $P_n = \frac{X^n}{n}$

(c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 5 *(Équivalence de normes (3267)).*
Soit $E = \left\{ f \in C^1([0,1], \mathbb{R} \mid f(0) = 0 \right\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E comme suit

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \tag{6}$$
$$N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \tag{7}$$

(a) Montrer que ce sont des normes sur E

(b) Montrer que N_2 est dominée par N_1

(c) Démontrer que pour $f \in E$ on a

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t))\, dt \tag{8}$$

(d) En déduire que N_1 est dominée par N_2

Exercice 6 *(Topologie de $B(I, \mathbb{R})$).*
On note E l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ bornées muni de la norme uniforme. Soit A l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.
La partie A est-elle un espace vectoriel ? Calculer son adhérence puis son intérieur.

Exercice 7 *(Espace de suites).*
Soit E l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle.

(a) Déterminer l'adhérence des suites stationnaires en zéro

(b) Déterminer l'intérieur des suites croissantes

(c) Déterminer l'adhérence des suites croissantes

Exercice 8 *(Liberté dans un evn).*
Soit E un espace euclidien.

(a) Montrer que l'ensemble suivant est un ouvert de E^2

$$\{(x, y) \in E \mid (x, y) \text{ libre}\} \tag{9}$$

(b) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $M_n(\mathbb{R})$.

(c) En déduire que si (A_n) est une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ non inversibles qui converge vers A alors A n'est pas inversible.

Exercice 9 *(Hyperplans).*
Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E.
Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E.

Exercice 10 *(Continuité d'une application linéaire).*
Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme de E.
Montrer que u est continu si et seulement si $\{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$ est fermé.

Exercice 11 *(Continuité d'une forme linéaire).*
Soit E un espace euclidien et f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Indication: Pour le sens dur, considérer une suite de norme 1 tel que $f(x_n) \to +\infty$ et un supplémentaire du noyau

Exercice 12 *(Inégalité de Hölder).* Soit $p, q > 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$. On note pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \tag{10}$$

(a) Pour $a, b > 0$, montrer que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Indication: Concavité du logarithme

(b) Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité suivante (Inégalité de Hölder) est vérifiée

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{11}$$

Indication: Utiliser la question précédente

(c) Montrer que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{12}$$

Indication: Se ramener à des vecteurs de norme 1

(d) Montrer que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{13}$$

Indication: Découper $|x + y|^p$*, inégalité triangulaire puis Hölder*

(e) En déduire que $\| \cdot \|_p$ est une norme pour $p \geq 1$