Langages Formels

TD n°1

Emilie Grienenberger
emilie.grienenberger@lsv.fr

31 mars 2021

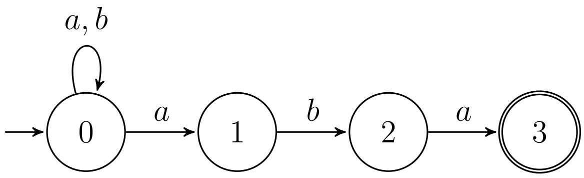
Exercise 1 : Construction d'automates

On note $\Sigma = \{0, 1\}$.

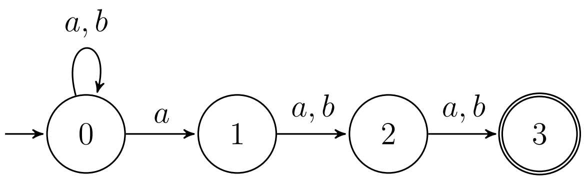
1. Donner un automate qui reconnaît les langages :
   (a) $L_1 = \{u \in \Sigma^* :$ toute occurence de 1 est suivie de deux occurences de $0\}$
   (b) $L_2 = \{u \in \Sigma^* :$ u ne contient pas deux occurences successives de $0\}$
   (c) $L_3 = \{u \in \Sigma^* :$ le nombre d'occurences de 1 est pair$\}$
2. Donner un automate qui reconnaît le langage des multiples de 3 en base 2 où la représentation des entiers est "big-endian" (i.e. les bits sont rangés du plus fort au plus faible).

Exercise 2 : Déterminisation

1. Pour chacun des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, déterminer le langage reconnu et donner un automate déterministe équivalent.



(a) Automate $\mathcal{A}_1$



(b) Automate $\mathcal{A}_2$

2. Si $\Sigma = \{a, b\}$, montrer que le langage $L = \Sigma^* a \Sigma^{n-1}$ ne peut être reconnu par un automate déterministe de moins de 2^n états.

3. Conclure sur le nombre d'états d'automates déterminisés par rapport à leur version non déterministe.

Exercise 3 : Des étoiles

On considère les énoncés suivants, de plus en plus forts.

Soit $L \subseteq \Sigma^*$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \in L$:

(a) Si $|x| \geq N$ alors il peut s'écrire $x = u_1 u_2 u_3$ avec $u_2 \neq \varepsilon$ et $u_1 u_2^* u_3 \subseteq L$.

(b) Si $x = w_1 w_2 w_3$ avec $|w_2| \geq N$ alors $w_2 = u_1 u_2 u_3$ avec $u_2 \neq \varepsilon$ et $w_1 u_1 u_2^* u_3 w_3 \subseteq L$.

(c) Si $x = u v_1 v_2 \dots v_M w$ avec $|v_i| \geq 1$ et $M \geq N$, alors il existe $0 \leq j < k \leq M$ tel que $u v_1 \dots v_j (v_{j+1} \dots v_k)^* v_{k+1} \dots v_M w \subseteq L$.

1. Montrer que tout langage reconnaissable vérifie l'énoncé (a).
2. Montrer que $\{\ a^n b^n\ :\ n \in \mathbb{N}\ \}$ n'est pas reconnaissable.

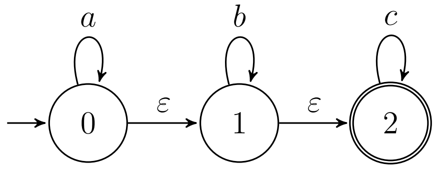
On admet que les langages reconnaissables satisfont les trois propriétés (a), (b), et (c).

3. Montrer que le langage $\{\ a^{n^2}\ :\ n \in \mathbb{N}\ \}$ n'est pas reconnaissable.
4. Montrer que $\{\ u\ :\ u = \widetilde{u}\ \}$, c'est à dire le langage des palindromes, n'est pas reconnaissable.
5. De même pour $\{\ (ab)^n (cd)^n\ \} \cup (\Sigma^* \{\ aa, bb, cc, dd, ac\ \} \Sigma^*)$.
6. Montrer que le langage suivant satisfait (c) mais n'est pas reconnaissable : $\{\ udv\ :\ u, v \in \{a, b, c\}^*,\ u \neq v$ ou bien l'un des deux contient un carré $\}$. On pourra admettre l'existence d'une infinité de mots sans carrés sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.

Exercise 4 : ε-moves

Un automate fini avec ε-transitions sur un alphabet Σ est un 5-uplet $\langle Q, I, F, \delta \rangle$ où $I, F \subseteq Q$ et $\delta \subseteq Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times Q$. Une ε-transition (une transition étiquetée par ε) peut être empruntée sans consommer de lettres du mot d'entrée. Les notions de chemin et d'acceptation sont étendues de manière naturelle.

1. On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Quel est le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}_0$?



Un automate $\mathcal{A}_0$ avec ε-transitions

Soit $\mathcal{A} = \langle Q, I, F, \delta \rangle$ un automate avec ε-transitions. Pour tout état $q \in Q$, on note $Cl(q)$ la clôture par ε-transitions de l'état q :

$$q' \in Cl(q) \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \xrightarrow{\varepsilon}_{\delta}^{n} q'$$

2. Quelles sont les clôtures des états de $\mathcal{A}_0$?
3. Pour tout $\mathcal{A} = \langle Q, I, F, \delta \rangle$ un automate avec ε-transitions, construire un automate sans ε-transitions $\hat{\mathcal{A}} = \langle Q, I, \hat{F}, \hat{\delta} \rangle$ qui reconnait le même langage.
4. Donner un automate déterministe qui reconnait le même langage que l'automate $\mathcal{A}_0$.

Exercise 5 : Opérations et problèmes : questions de cours

1. Étant donné un langage reconnaissable, montrer que son complémentaire est encore reconnaissable.
2. Étant donnés deux langages reconnaissables montrer que leur union, intersection et différence sont encore des langages reconnaissables.
3. Étant donné un langage reconnaissable L, montrer que l'ensemble des suffixes des mots de L est encore reconnaissable.
4. L'appartenance du mot vide ε à un langage reconnaissable est-elle décidable ?
5. La vacuité d'un langage reconnaissable est-elle décidable ?
6. L'universalité d'un langage reconnaissable est-elle décidable ?
7. Étant donné un langage reconnaissable L non vide, montrer que l'on peut calculer le plus long préfixe commun à tous les mots de L.