# Critères de simplification

## *Correction.*

À rendre pour le mardi 14 novembre 2006, soit par email (`goubault@lsv.ens-cachan.fr`) soit par courrier postal (Jean Goubault-Larrecq, LSV/ENS Cachan, 61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan, France). Les questions les plus difficiles sont marquées d'une étoile $(*)$.

## I. Un critère général de simplification.

Soit $S$ un ensemble de clauses du premier ordre. Pour tout littéral $\pm A$, notons $\mp A$ le littéral opposé. L'*opposé* de $+A$ est $-A$, celui de $-A$ est $+A$.

Soient $C_1$, ..., $C_k$, $C$ des clauses du premier ordre. On rappelle que $C_1, \ldots, C_k \models C$ si et seulement si toute interprétation de Herbrand qui rend vraie toute instance close de $C_1$, ..., $C_k$ rend aussi vraie toute instance close de $C$.

On rappelle qu'une interprétation de Herbrand *partielle* est une fonction partielle $I$ des atomes clos vers $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$, de domaine *fini*. (C'est-à-dire définie seulement pour un nombre fini d'atomes clos.) Une interprétation partielle rend une clause fausse si et seulement si elle rend tous les littéraux de la clause faux (en particulier, aucun littéral ne reste non interprété). Disons que $C_1 \ldots, C_k \models^* C$ si et seulement si pour toute instance close $C\theta$ de $C$, toute interprétation partielle $I$ qui rend fausse $C\theta$ rend aussi fausse au moins une instance close d'une des clauses $C_i$, $1 \leq i \leq k$.

1. Montrer que si $C_1 \ldots, C_k \models^* C$, alors $C_1, \ldots, C_k \models C$.

   *Soit $I$ une interprétation qui satisfait toutes les instances closes de chaque $C_i$. Supposons que $I$ ne satisfasse pas une certaine instance close $C\theta$ de $C$. Alors la restriction de $I$ aux atomes de $C\theta$ rend $C\theta$ fausse. Cette restriction, appelons-la $I'$ est une interprétation partielle. Puisque $C_1 \ldots, C_k \models^* C$, $I'$ rend donc fausse une des instances closes d'un $C_i$, c'est donc aussi le cas de $I$, contradiction.*

2. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

   *On prend $C_1 = +A \vee +B$, $C_2 = +A \vee -B$, $C = +A$. Clairement, $C_1, \ldots, C_k \models C$, mais il est faux que $C_1 \ldots, C_k \models^* C$ : prendre l'interprétation partielle qui rend $A$ faux mais laisse $B$ indéfini.*

3. Montrer que si $C$ est une tautologie, alors $\models^* C$ (le cas $k = 0$ de la définition ci-dessus).

*Il n'existe aucune interprétation, même partielle, qui rend une tautologie fausse.*

4. Montrer que si $C_1$ subsume $C$, alors $C_1 \models^* C$.

   *Écrivons $C = C_1\sigma \vee D$. Soit $I$ une interprétation partielle rendant l'instance close $C\theta$ fausse. Alors $C_1\sigma\theta$ est fausse dans $I$, et est une instance close de $C_1$.*

5. On introduit le *critère d'élimination de redondance général* suivant : si $S$ est l'ensemble de clauses courant, s'il contient des clauses $C_1, \ldots, C_k$ et $C$ et s'il existe des substitutions $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ telles que :
   (a) $C_1\sigma_1 \ldots, C_k\sigma_k \models^* C$ ;
   (b) pour tout $i$, $1 \leq i \leq k$, $\sigma_i$ n'unifie aucun couple de littéraux de $C_i$ ;

   alors éliminer $C$ de $S$. (On dira que $C$ *est redondante*.)

   Montrer que l'élimination de tautologies, l'élimination de clauses linéairement subsumées présentées en cours sont des cas particuliers de ce critère, au sens où les tautologies et les clauses linéairement subsumées sont redondantes.

   *C'est clair pour les tautologies, par la question 3. Pour les clauses linéairement subsumées, on remarque que, si $C = C_1\sigma_1 \vee D$, alors $C_1\sigma_1 \models^* C$. Finalement, la condition 2 est vérifiée par la définition de la subsomption linéaire.*

6. $(*)$ En reprenant l'argumentation du cours, montrer que l'élimination de clauses redondantes, au sens de la question précédente, est *compatible* avec la résolution ordonnée avec sélection, pour n'importe quelle fonction de sélection et n'importe quel ordre stable $\succ$.

   Autrement dit, montrer que si $S$ est un ensemble de clauses du premier ordre insatisfiable, il existe une dérivation de la clause vide à partir de $S$ par un nombre fini d'étapes de résolution ordonnée avec sélection, et ce quelle que soit la stratégie utilisée pour éliminer des clauses redondantes entre deux étapes de résolution.

   On raisonnera sur les arbres sémantiques utilisés au théorème 8 du poly. Il ne sera pas nécessaire de reproduire la démonstration de ce théorème in extenso.

   *Il suffit de montrer que la mesure $\mu(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$ de la démonstration du théorème 8 du cours décroît, possiblement pas strictement, lorsqu'on élimine une clause redondante $C$ de l'ensemble courant $S$, transformant l'arbre décoré $T$ en un nouvel arbre décoré $T'$. La subtilité, c'est que $C$ peut décorer plusieurs nœuds d'échec de $T$. Pour chacun de ces nœuds d'échec, on a $C = C_N$. Puisque $C_1\sigma_1 \ldots, C_k\sigma_k \models^* C$ et que $C_N\theta_N$ est fausse en $N$, par définition il existe $i$, $1 \leq i \leq k$, tel que $C_i\sigma_i\theta_N$ soit aussi fausse en $N$. On remplace le couple $(C_N, \theta_N)$ au nœud $N$ par le couple $(C_i, \sigma_i\theta_N)$, et ce pour chaque nœud d'échec $N$ tel que $C = C_N$. Ceci produit un nouvel arbre décoré $(T', C'_\bullet, \theta'_\bullet)$. Notons que ce nouvel arbre est un arbre décoré pour $S$ privé de $C$, et que tous les nœuds $N$ considérés ci-dessus y restent des nœuds d'échec : $C_i\sigma_i\theta_N$ ne peut en effet pas être fausse plus haut que $N$, sinon $N$ n'aurait pas été un nœud d'échec de $T$.*

   *La suite du corrigé était erronée. Je montre l'erreur que j'ai faite pour faire voir la subtilité.*

**Version erronée.** *Pour montrer que la mesure $\mu$ décroît, on remarque qu'en chaque nœud $N$ de ce type, $\mu_1(C_i\sigma_i, \theta_N) = \mu_1(C_i, \sigma_i\theta_N)$ par la condition 2 ($\sigma_i$ n'unifie aucun couple de littéraux de $C_i$), comme à la section 4.2 du cours. On a donc remplacé les couples $(C_N, \theta_N)$ en un certain nombre de nœuds d'échec $N$ par des couples de mesure $\mu_1$ identique. La mesure $\mu^-$ de tout l'arbre reste donc inchangée, donc, comme la taille $|T|$ de l'arbre reste inchangée, la mesure $\mu$ de l'arbre reste inchangée elle aussi.*

**Version corrigée.** *On a bien sûr $\mu_1(C_i\sigma_i, \theta_N) = \mu_1(C_i, \sigma_i\theta_N)$ par la condition 2, mais ceci ne garantit pas que $\mu_1(C_i, \sigma_i\theta_N) \leq_{mul} \mu(C_N, \theta_N)$. (On n'a pas besoin de l'ordre strict $\leq_{mul} \setminus =$, puisque de toute façon le nombre de clauses $|S|$ décroîtra.) Une solution est d'ajouter la condition $C \geq_{mul} C_1\sigma_1, \ldots, C \geq_{mul} C_k\sigma_k$ au critère de redondance, les clauses étant vues comme des multi-ensembles d'atomes (on ignore les signes). De façon curieuse, cette condition existait dans mon source TEX, mais commentée : j'avais dû estimer à tort qu'elle ne servait à rien...*

# II. Où l'on répare une erreur.

Lire attentivement la section 5.3 du cours.

1. Il se trouve que la démonstration du théorème 12 est erronée. L'erreur est dans la phrase

   "[...] alors soit $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est fausse en $N$ et alors $+\ulcorner C' \urcorner(*) \vee C'\theta_N$ est fausse en $N$, soit $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est vraie en $N$ et alors $C\theta_N \vee -\ulcorner C' \urcorner(*)$ est fausse en $N$."

   Quelle est l'erreur ? (Le but des questions suivantes est de corriger cette erreur.)

   *L'arbre sémantique est un arbre d'interprétations* partielles. *Il est donc possible que $\ulcorner C' \urcorner(*)$ soit fausse en $N$, vraie en $N$, ou ... indéfinie. C'est le cas même si $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est nécessairement plus haut que l'atome $P(t)$ de $C$, avec $P(t) \succ \ulcorner C' \urcorner(*)$. Il se peut tout simplement que $\ulcorner C' \urcorner(*)$ ne soit pas dans l'énumération des atomes clos $A_1^0, \ldots, A_n^0$ sur laquelle a été construit l'arbre sémantique.*

2. $(*)$ Pour corriger cette erreur, on va imaginer un critère de redondance plus général que celui de la partie I. Fixons un ensemble $S$ de clauses, et $\succ$ un ordre strict stable.

   Appelons *$\succ$-énumération* $\mathcal{A}$ toute énumération finie $\mathcal{A} = [A_1^0, \ldots, A_n^0]$ d'atomes clos telle que $A_i^0 \succ A_j^0$ implique $i > j$. Appelons *$\mathcal{A}$-interprétation* une interprétation partielle de domaine un préfixe de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire donnant des valeurs de vérité aux atomes $A_1^0, \ldots, A_k^0$ et eux seuls, pour un certain entier $k$, $0 \leq k \leq n$. Notons $C_1, \ldots, C_k \models^{\mathcal{A}} C$ si et seulement si pour toute instance close $C\theta$ de $C$, toute $\mathcal{A}$-interprétation $I$ qui rend fausse $C\theta$ rend aussi fausse au moins une instance close d'une des clauses $C_i$, $1 \leq i \leq k$.

   On dit que $C$ est *$\mathcal{A}$-redondante* dans $S$ si et seulement s'il existe des clauses $C_1, \ldots, C_k$ de $S$ et des substitutions $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ telles que :

   (a) $C_1\sigma_1 \ldots, C_k\sigma_k \models^{\mathcal{A}} C$ ;

   (b) pour tout $i$, $1 \leq i \leq k$, $\sigma_i$ n'unifie aucun couple de littéraux de $C_i$ ;

On dit que $S$ est *insatisfiable à support dans* $\mathcal{A}$ si et seulement s'il existe un nombre fini d'instances closes de $S$, *formées uniquement d'atomes clos pris dans* $\mathcal{A}$, qui soit insatisfiable.

Pour tout ensemble fini $\mathcal{A}_0$ d'atomes clos, on dira que $C$ est $\succ/\mathcal{A}_0$-*redondante* si et seulement si, pour toute $\succ$-énumération $\mathcal{A}$ contenant tous les atomes de $\mathcal{A}_0$ et telle que $S$ soit insatisfiable à support dans $\mathcal{A}$, alors $C$ est $\mathcal{A}$-redondante dans $S$. (Bien que ceci soit hors sujet, on observera que tout clause est $\succ/\mathcal{A}_0$-redondante dans un ensemble satisfiable de clauses.)

Justifier rapidement que l'élimination de clauses $\succ\ /\mathcal{A}_0$-redondantes est compatible avec la résolution ordonnée (par $\succ$) avec sélection, pour n'importe quelle fonction de sélection.

> *Il suffit de refaire toute la démonstration du théorème 8 du cours, en fixant comme énumération $A_1^0, \ldots, A_n^0$ une $\succ$-énumération quelconque non seulement des atomes clos figurant dans l'ensemble fini $S_0$ d'instances closes de $S$ du théorème de Herbrand, mais aussi des atomes de $\mathcal{A}_0$. Le reste de la démonstration du théorème 8 reste inchangée. On observe ensuite que l'argument de la question I.6 fonctionne texto. En fait les conditions ci-dessus retranscrivent exactement ce dont on a besoin dans cet argument.*

3. Fixons un ensemble fini $\mathcal{A}_0$ quelconque d'atomes clos de $\mathcal{Q}$. On considère la règle de splitting sans splitting *restreinte à* $\mathcal{A}_0$ suivante :

$$\frac{C \vee C'}{C \vee -\ulcorner C' \urcorner(*) \quad + \ulcorner C' \urcorner(*) \vee C'}$$

où :
- comme dans le cours, $C$ et $C'$ sont deux sous-clauses non vides, ne partageant aucune variable, telles que $C'$ est formée de symboles de prédicats dans $\mathcal{P}$ uniquement, et que $C$ contient au moins un atome $P(t)$ avec $P \in \mathcal{P}$ ;
- et (nouveau !) $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est restreint à être dans $\mathcal{A}_0$.

Comme dans le cours, cette règle a pour effet d'ajouter les deux conclusions $C \vee -\ulcorner C' \urcorner(*)$ et $+\ulcorner C' \urcorner(*) \vee C'$, puis de supprimer la prémisse $C \vee C'$. Montrer que cette suppression est une instance de la règle d'élimination de clauses $\succ/\mathcal{A}_0$-redondantes.

> *Soit $\mathcal{A} = [A_1^0, \ldots, A_n^0]$ une $\succ$-énumération contenant tous les atomes de $\mathcal{A}_0$ et telle que $S$ soit insatisfiable à support dans $\mathcal{A}$. Pour toute $\mathcal{A}$-interprétation $I$, il existe donc une instance close d'une clause de $S$ qui est fausse dans $I$. Le seul cas non trivial est celui où cette clause est la clause à supprimer, $C \vee C'$. Disons que $I$ rend fausse l'instance close $C\theta \vee C'\theta$. Comme $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est dans $\mathcal{A}_0$ par hypothèse, et que de plus $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est plus petit (dans $\succ$) qu'au moins un atome de $C$ (puisque $C$ contient au moins un atome $P(t)$ avec $P \in \mathcal{P}$, et qu'alors $P(t) \succ \ulcorner C' \urcorner(*)$ : voir cours), cette fois-ci $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est bien soit vrai soit fausse dans $I$. Si $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est vrai dans $I$, alors $C \vee -\ulcorner C' \urcorner(*)$, instanciée par $\theta$, est fausse dans $I$. Sino, alors c'est $+\ulcorner C' \urcorner(*) \vee C'$, instanciée par $\theta$, qui est fausse dans $I$.*

4. En déduire que la règle de splitting sans splitting restreinte à $\mathcal{A}_0$ est compatible avec la résolution ordonnée avec sélection, quel que soit l'ensemble fini $\mathcal{A}_0$ d'atomes clos.

   *Il suffit de montrer que l'ajout des deux conclusions de la règle est compatible, vu que la question précédente montrer que la suppression de la prémisse l'est déjà. Or l'ajout des deux conclusions ne change rien à l'arbre décoré $(T, C_\bullet, \theta_\bullet)$, donc rien non plus à sa mesure $\mu$.*

5. Justifier rapidement pourquoi le théorème 18 du cours est donc correct, malgré le fait qu'il s'appuie sur le théorème 12 du cours. (Utiliser la règle de splitting sans splitting restreinte à $\mathcal{A}_0$, et décrire $\mathcal{A}_0$ explicitement.)

   *Les seuls symboles de splitting jamais fabriqués sont ceux de l'ensemble $\mathcal{Q}_0$ des $\ulcorner C \urcorner$, où $C$ est un $\epsilon$-bloc négatif formé à partir de symboles de prédicats dans $\mathcal{P}$. On notera qu'il y a au plus $2^p$ éléments dans $\mathcal{Q}_0$, où $p$ est le cardinal de $\mathcal{P}$. On prend $\mathcal{A}_0 = \mathcal{Q}_0$.*