Critères de simplification

À rendre pour le mardi 14 novembre 2006, soit par email (`goubault@lsv.ens-cachan.fr`) soit par courrier postal (Jean Goubault-Larrecq, LSV/ENS Cachan, 61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan, France). Les questions les plus difficiles sont marquées d'une étoile $(*)$.

I. Un critère général de simplification.

Soit S un ensemble de clauses du premier ordre. Pour tout littéral $\pm A$, notons $\mp A$ le littéral opposé. L'*opposé* de $+A$ est $-A$, celui de $-A$ est $+A$.

Soient C_1, ..., C_k, C des clauses du premier ordre. On rappelle que $C_1, \ldots, C_k \models C$ si et seulement si toute interprétation de Herbrand qui rend vraie toute instance close de C_1, ..., C_k rend aussi vraie toute instance close de C.

On rappelle qu'une interprétation de Herbrand *partielle* est une fonction partielle I des atomes clos vers $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$, de domaine *fini*. (C'est-à-dire définie seulement pour un nombre fini d'atomes clos.) Une interprétation partielle rend une clause fausse si et seulement si elle rend tous les littéraux de la clause faux (en particulier, aucun littéral ne reste non interprété). Disons que $C_1 \ldots, C_k \models^* C$ si et seulement si pour toute instance close $C\theta$ de C, toute interprétation I qui rend fausse $C\theta$ rend aussi fausse au moins une instance close d'une des clauses C_i, $1 \leq i \leq k$.

1. Montrer que si $C_1 \ldots, C_k \models^* C$, alors $C_1, \ldots, C_k \models C$.
2. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.
3. Montrer que si C est une tautologie, alors $\models^* C$ (le cas $k = 0$ de la définition ci-dessus).
4. Montrer que si C_1 subsume C, alors $C_1 \models^* C$.
5. On introduit le *critère d'élimination de redondance général* suivant : si S est l'ensemble de clauses courant, s'il contient des clauses C_1, ..., C_k et C et s'il existe des substitutions σ_1, ..., σ_k telles que :
   (a) $C_1\sigma_1 \ldots, C_k\sigma_k \models^* C$;
   (b) pour tout i, $1 \leq i \leq k$, σ_i n'unifie aucun couple de littéraux de C_i ;

   alors éliminer C de S. (On dira que C *est redondante*.)

   Montrer que l'élimination de tautologies, l'élimination de clauses linéairement subsumées présentées en cours sont des cas particuliers de ce critère, au sens où les tautologies et les clauses linéairement subsumées sont redondantes.

6. $(*)$ En reprenant l'argumentation du cours, montrer que l'élimination de clauses redondantes, au sens de la question précédente, est *compatible* avec la résolution ordonnée avec sélection, pour n'importe quelle fonction de sélection et n'importe quel ordre stable $\succ$.

   Autrement dit, montrer que si S est un ensemble de clauses du premier ordre insatisfiable, il existe une dérivation de la clause vide à partir de S par un nombre fini d'étapes de résolution ordonnée avec sélection, et ce quelle que soit la stratégie utilisée pour éliminer des clauses redondantes entre deux étapes de résolution.

   On raisonnera sur les arbres sémantiques utilisés au théorème 8 du poly. Il ne sera pas nécessaire de reproduire la démonstration de ce théorème in extenso.

II. Où l'on répare une erreur.

Lire attentivement la section 5.3 du cours.

1. Il se trouve que la démonstration du théorème 12 est erronée. L'erreur est dans la phrase

   "[...] alors soit $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est fausse en N et alors $+\ulcorner C' \urcorner(*) \vee C'\theta_N$ est fausse en N, soit $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est vraie en N et alors $C\theta_N \vee -\ulcorner C' \urcorner(*)$ est fausse en N."

   Quelle est l'erreur ? (Le but des questions suivantes est de corriger cette erreur.)

2. $(*)$ Pour corriger cette erreur, on va imaginer un critère de redondance plus général que celui de la partie I. Fixons un ensemble S de clauses, et $\succ$ un ordre strict stable.

   Appelons $\succ$-*énumération* $\mathcal{A}$ toute énumération finie $\mathcal{A} = [A_1^0, \ldots, A_n^0]$ d'atomes clos telle que $A_i^0 \succ A_j^0$ implique $i > j$. Appelons $\mathcal{A}$-*interprétation* une interprétation partielle de domaine un préfixe de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire donnant des valeurs de vérité aux atomes A_1^0, ..., A_k^0 et eux seuls, pour un certain entier k, $0 \leq k \leq n$. Notons $C_1, \ldots, C_k \models^{\mathcal{A}} C$ si et seulement si pour toute instance close $C\theta$ de C, toute $\mathcal{A}$-interprétation I qui rend fausse $C\theta$ rend aussi fausse au moins une instance close d'une des clauses C_i, $1 \leq i \leq k$.

   On dit que C est $\mathcal{A}$-*redondante* dans S si et seulement s'il existe des clauses $C_1, \ldots, C_k$ de S et des substitutions σ_1, ..., σ_k telles que :

   (a) $C_1\sigma_1 \ldots, C_k\sigma_k \models^{\mathcal{A}} C$;

   (b) pour tout i, $1 \leq i \leq k$, σ_i n'unifie aucun couple de littéraux de C_i ;

   On dit que S est *insatisfiable à support dans* $\mathcal{A}$ si et seulement s'il existe un nombre fini d'instances closes de S, *formées uniquement d'atomes clos pris dans* $\mathcal{A}$, qui soit insatisfiable.

   Pour tout ensemble fini $\mathcal{A}_0$ d'atomes clos, on dira que C est $\succ/\mathcal{A}_0$-*redondante* si et seulement si, pour toute $\succ$-énumération $\mathcal{A}$ contenant tous les atomes de $\mathcal{A}_0$ et telle que S soit insatisfiable à support dans $\mathcal{A}$, alors C est $\mathcal{A}$-redondante dans S. (Bien que ceci soit hors sujet, on observera que tout clause est $\succ/\mathcal{A}_0$-redondante dans un ensemble satisfiable de clauses.)

   Justifier rapidement que l'élimination de clauses $\succ/\mathcal{A}_0$-redondantes est compatible avec la résolution ordonnée (par $\succ$) avec sélection, pour n'importe quelle fonction de sélection.

3. Fixons un ensemble fini $\mathcal{A}_0$ quelconque d'atomes clos de $\mathcal{Q}$. On considère la règle de splitting sans splitting *restreinte à* $\mathcal{A}_0$ suivante :

$$\frac{C \vee C'}{C \vee -\ulcorner C' \urcorner(*) \quad + \ulcorner C' \urcorner(*) \vee C'}$$

   où :
   – comme dans le cours, C et C' sont deux sous-clauses non vides, ne partageant aucune variable, telles que C' est formée de symboles de prédicats dans $\mathcal{P}$ uniquement, et que C contient au moins un atome $P(t)$ avec $P \in \mathcal{P}$;
   – et (nouveau !) $\ulcorner C' \urcorner(*)$ est restreint à être dans $\mathcal{A}_0$.

   Comme dans le cours, cette règle a pour effet d'ajouter les deux conclusions $C \vee -\ulcorner C' \urcorner(*)$ et $+\ulcorner C' \urcorner(*) \vee C'$, puis de supprimer la prémisse $C \vee C'$. Montrer que cette suppression est une instance de la règle d'élimination de clauses $\succ/\mathcal{A}_0$-redondantes.

4. En déduire que la règle de splitting sans splitting restreinte à $\mathcal{A}_0$ est compatible avec la résolution ordonnée avec sélection, quel que soit l'ensemble fini $\mathcal{A}_0$ d'atomes clos.

5. Justifier rapidement pourquoi le théorème 18 du cours est donc correct, malgré le fait qu'il s'appuie sur le théorème 12 du cours. (Utiliser la règle de splitting sans splitting restreinte à $\mathcal{A}_0$, et décrire $\mathcal{A}_0$ explicitement.)