## Un petit peu de réécriture

On fixera dans la suite la signature du premier ordre, et elle restera implicite. Nous supposerons qu'elle ne contient aucun symbole de prédicat censé représenter l'égalité: on se place donc dans le cadre de la logique du premier ordre pure, comme dans le cours.

Nous utiliserons par convention dans ce sujet la formulation de la résolution ordonnée avec sélection où la fonction de sélection ne sélectionne qu'un littéral négatif au plus (ce qui simplifiera certaines étapes), et où la résolution est découpée en résolution binaire ordonnée avec sélection et factorisation positive ordonnée:

• Résolution ordonnée binaire avec sélection:

$$\frac{C\vee +A \quad C'\vee -A'}{C\sigma\vee C'\sigma}$$

où  $\sigma = mgu(A \doteq A')$ , aucun littéral n'est sélectionné dans  $C \vee +A$  et A est maximal dans  $C \vee +A$ ; et -A' est sélectionné dans  $C' \vee -A'$  ou bien aucun littéral n'y est sélectionné mais A' est maximal dans  $C' \vee -A'$ .

• Factorisation positive ordonnée:

$$\frac{C \vee +A \vee +A'}{C\sigma \vee +A\sigma}$$

où  $\sigma = mgu(A \doteq A')$ , A et A' sont maximaux dans  $C \vee +A \vee +A'$ , et aucun littéral n'est sélectionné dans  $C \vee +A \vee +A'$ .

On ne demande pas de redémontrer que la démonstration du théorème 8 du cours établit la complétude de ces deux règles.

## 1 La surréduction ("narrowing")

Un système de réécriture  $\mathcal{R}$  est un ensemble fini de règles de réécriture  $s \to t$ , où s et t sont deux termes. On demande de plus que toutes les variables libres dans t soient libres dans s; par exemple,  $x \to f(x,y)$  n'est pas une règle de réécriture.

On dit que u se réécrit en v (par  $\mathcal{R}$ ), et on note  $u \longrightarrow v$ , si et seulement s'il existe une règle  $s \to t$  dans  $\mathcal{R}$  et une substitution  $\sigma$  telle que v résulte du remplacement d'une

occurrence de  $s\sigma$  par  $t\sigma$  dans u. Par exemple, f(g(a,a),a) se réécrit en f(g(a,h(a,a)),a) par la règle  $g(x,x) \to g(a,h(x,a))$ , en utilisant la substitution  $\sigma = [x \mapsto a]$ .

On notera  $\longrightarrow^*$  la clôture réflexive-transitive de  $\longrightarrow$ , et  $\leftrightarrow^*$  la clôture réflexive-symétrique-transitive de  $\longrightarrow$ . En cas d'ambiguïté, on écrira  $\longrightarrow^*_{\mathcal{R}}$  pour préciser le système de réécriture.

Un contexte  $\mathcal{C}$  est, intuitivement, un terme avec une occurrence distinguée d'une constante spéciale appelée le trou. Par exemple, \_ et  $f(\_,a)$  sont deux contextes, mais f(a,a) et  $f(\_,\_)$  n'en sont pas. On notera  $\mathcal{C}[t]$  le terme obtenu en remplaçant le trou \_ dans  $\mathcal{C}$  par t. Par exemple, si  $\mathcal{C} = f(\_,a)$ , alors  $\mathcal{C}[g(a,a)] = f(g(a,a),a)$ .

On voit que u se réécrit en v si et seulement s'il existe un contexte  $\mathcal{C}$ , une règle  $s \to t$  dans  $\mathcal{R}$  et une substitution  $\sigma$ , tels que  $u = \mathcal{C}[s\sigma]$  et  $v = \mathcal{C}[t\sigma]$ .

On notera que  $\leftrightarrow^*$  est une congruence, c'est-à-dire une relation d'équivalence  $\approx$  qui passe au contexte, c'est-à-dire que  $u \approx v$  implique  $C[u] \approx C[v]$ . Les congruences sont aussi appelées des théories équationnelles.

Étant donnée une congruence  $\approx$ , on dit qu'un système de réécriture  $\mathcal{R}$  en est une présentation si et seulement si  $\approx$  coïncide avec  $\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$ . Par exemple, le système suivant est une présentation de la théorie des groupes:

$$\begin{array}{ll} 0+x\to x & x+0\to x \\ x+(y+z)\to (x+y)+z & \\ x+(-x)\to 0 & (-x)+x\to 0 \end{array}$$

On étend les notions de réécriture aux formules atomiques, et de là, aux formules, de la façon évidente. On notera  $\mathcal{A}$  un contexte atomique, c'est-à-dire une formule atomique avec un trou. De façon équivalente, un contexte atomique  $\mathcal{A}$  est de la forme  $P(t_1,\ldots,t_{i-1},\mathcal{C},t_{i+1},\ldots,t_n)$  pour un certain symbole de prédicat P, d'arité n, pour un certain  $i, 1 \leq i \leq n$ , pour certains termes  $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ , et pour un certain contexte  $\mathcal{C}$ .

1. Difficulté: 3 lignes.

Soit  $\approx$  une théorie équationnelle. Une  $\approx$ -interprétation est une interprétation de Tarski I telle que pour toutes formules F et G telles que  $F \leftrightarrow^* G$ , on a  $I, \rho \models F$  ssi  $I, \rho \models \rho$  pour tout environnement  $\rho$ . Autrement dit, les formules convertibles via  $\leftrightarrow^*$  ont les mêmes valeurs de vérité.

Un  $\approx$ -modèle d'une formule F, ou d'un ensemble de clauses S, est un modèle de Tarski de F, resp. S, qui est aussi une  $\approx$ -interprétation. S est  $\approx$ -insatisfiable ssi S n'a pas de  $\approx$ -modèle.

On suppose que  $\mathcal{R}$  est une présentation de  $\approx$ . Montrer que les  $\approx$ -modèles de S sont exactement les modèles de  $S \cup S_{\mathcal{R}}$ , où  $S_{\mathcal{R}}$  est l'ensemble (en général infini) des clauses de la forme:

$$\mathcal{A}[s] \ \Leftarrow \ \mathcal{A}[t] \tag{1}$$

$$\mathcal{A}[t] \iff \mathcal{A}[s] \tag{2}$$

où  $\mathcal{A}$  parcourt l'ensemble des contextes atomiques, et  $s \to t$  parcourt l'ensemble des règles de  $\mathcal{R}$ .

2. Difficulté: 44 lignes.

Supposons que > soit un ordre stable vérifiant la condition de compatibilité:

(C) pour toute règle  $s \to t$  de  $\mathcal{R}$ , pour tout contexte atomique  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}[s] \succ \mathcal{A}[t]$ .

Supposons d'autre part:

(F)  $\succ$  est bien fondé sur les atomes clos: il n'y a pas de chaîne infinie  $A_0 \succ A_1 \succ \ldots \succ A_k \succ \ldots$  d'atomes clos.

Supposons d'autre part  $\mathcal{R}$  ground-localement confluent, ce qui revient à dire:

(L) si  $s \to t$  et  $s' \to t'$  sont deux règles de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont deux contextes atomiques sans variables tels que  $\mathcal{A}[s\theta] = \mathcal{A}'[s'\theta']$ , où  $s\theta$  et  $s'\theta'$  sont clos, alors les réduits  $\mathcal{A}[t\theta]$  et  $\mathcal{A}'[t'\theta']$  ont un réduit commun: il existe un atome A (nécessairement clos) tel que  $\mathcal{A}[t\theta] \longrightarrow^* A$  et  $\mathcal{A}'[t'\theta'] \longrightarrow^* A$ .

On admettra (c'est une conséquence du lemme de Newman, que vous verrez dans ce cours) que sous les conditions (C), (F) et (L), tout atome clos  $A_0$  a une unique forme normale  $A_0 \downarrow$ , c'est-à-dire que  $A_0 \longrightarrow^* A_0 \downarrow$  et  $A_0 \downarrow$  n'a aucun réduit (est normal, autrement dit, n'est de la forme  $\mathcal{A}[s\sigma]$  pour aucun contexte atomique  $\mathcal{A}$ , aucune substitution  $\sigma$ , et aucune règle  $s \to t$ ).

Montrer, en invoquant les arguments du théorème 8 du cours, que l'étape de résolution ordonnée avec sélection suivante (en supposant que l'on ne sélectionne rien dans les clauses (1) ou (2)) est redondante dans n'importe quelle dérivation partant de  $S \cup S_{\mathcal{R}}$ , c'est-à-dire que dans la preuve de complétude, les étapes de résolution à produire pour réduire l'arbre décoré ne sont jamais de cette forme (autrement dit, il n'est jamais besoin de l'appliquer):

$$\frac{\mathcal{A}[s] \Leftarrow \mathcal{A}[t] \qquad \mathcal{A}'[t'] \Leftarrow \mathcal{A}'[s']}{\mathcal{A}'[t']\sigma \Leftarrow \mathcal{A}[t]\sigma}$$

où  $\sigma = mgu(\mathcal{A}[s], \mathcal{A}'[s']), s \to t \text{ et } s' \to t' \text{ sont deux règles de } \mathcal{R}.$ 

Attention: toutes les hypothèses, (C), (F) et (L) sont nécessaires. S'il y en a une dont vous n'avez pas eu besoin, votre démonstration est incomplète. (Seule (C) pourrait être remplacée par une condition plus faible.)

3. Difficulté: 11 lignes.

On se place sous les hypothèses des questions précédentes. Nous cherchons une procédure qui raisonne directement à partir de S, sans utiliser  $S_{\mathcal{R}}$ .

Pour ceci, nous allons considérer, en plus de la règle de résolution ordonnée avec sélection du cours (avec ordre stable  $\succ$  et fonction de sélection sel ), la règle suivante dite de *surréduction positive* (*narrowing* en anglais):

$$\frac{C\vee +\mathcal{A}[u]}{(C\vee +\mathcal{A}[t])\sigma}$$

où  $s \to t$  est une règle de  $\mathcal{R}$  (renommée de sorte à ce que ses variables libres soient distinctes de celles de la prémisse),  $\mathcal{A}$  est un contexte atomique,  $\sigma = mgu(u, s)$ , sel  $(C \lor +\mathcal{A}[u]) = \emptyset$ , et  $\mathcal{A}[u]$  est  $\succ$ -maximal dans  $C \lor +\mathcal{A}[u]$ .

On remarquera que ceci revient à effectuer une opération qui ressemble à la réécriture: modulo  $\sigma$ , on réécrit s en t dans un littéral positif de la clause. La différence est que l'on ne demande pas que u soit de la forme  $s\sigma$ , mais que u et s s'unifient.

On considérera aussi la règle de surréduction négative:

$$\frac{C \vee -\mathcal{A}[u]}{(C \vee -\mathcal{A}[t])\sigma}$$

où  $s \to t$  est une règle de  $\mathcal{R}$  (renommée de sorte à ce que ses variables libres soient distinctes de celles de la prémisse),  $\mathcal{A}$  est un contexte atomique,  $\sigma = mgu(u, s)$ , et soit  $\mathcal{A}[u]$  est sélectionné dans la prémisse  $C \vee -\mathcal{A}[u]$ , soit rien n'y est sélectionné et  $\mathcal{A}[u]$  y est  $\succ$ -maximal.

Montrer que la collection des quatre règles, de résolution binaire ordonnée (par  $\succ$ ) avec sélection (sel ), de factorisation positive ordonnée, de surréduction positive, et de surréduction négative, est correcte et complète (c'est-à-dire que S est  $\approx$ -insatisfiable ssi l'on peut déduire la clause vide  $\square$  à l'aide de ces règles), sous les hypothèses (C), (F) et (L).

4. Difficulté: 19 lignes.

Montrer que l'on peut de plus demander à ne jamais surréduire dans les variables, c'est-à-dire à ce que u ne soit pas une variable dans les deux règles de surréduction, et que l'on n'y perd pas la complétude.

5. Difficulté: 3 lignes.

On ne suppose maintenant plus que  $\mathcal{R}$  est ground-localement confluente (propriété (L)). Montrer que la collection des règles ci-dessus (résolution binaire ordonnée avec sélection, factorisation ordonnée positive, surréduction positive et négative) n'est pas complète.

## 2 Une règle de simplification

On considère ici uniquement des clauses de Horn. (Il est certainement possible de généraliser tout ceci aux clauses non de Horn, mais ceci deviendrait vite incompréhensible.)

Lorsque  $S_0$  est un ensemble de clauses de Horn dont la tête n'est pas  $\bot$ , et  $B_1, \ldots, B_n$  un ensemble fini d'atomes, on définit les *atomes forcés* par  $S_0$  et  $B_1, \ldots, B_n$  inductivement par:

- $B_1, \ldots, B_n$  sont forcés;
- pour toute clause  $A \Leftarrow A_1, \ldots, A_p$  de  $S_0$ , s'il existe une substitution  $\sigma$  telle que  $A_1\sigma$ ,  $\ldots$ ,  $A_p\sigma$  sont forcés, alors  $A\sigma$  est forcé.
- 1. Difficulté: 25 lignes.

Fixons un ordre stable  $\succ$  et une certaine fonction de sélection sel . Rappelons qu'une clause  $C = A \Leftarrow B_1, \ldots, B_n$  est génératrice dans S ssi A y est maximale pour  $\succ$  et sel  $(C) = \emptyset$ . Disons qu'une telle clause est fortement génératrice ssi sel  $(C) = \emptyset$  et  $A \succ B_1$  et ... et  $A \succ B_n$ .

Notons  $S_{gen}$  l'ensemble des clauses fortement génératrices d'un ensemble de clauses S.

Pour toute clause  $C = A \Leftarrow B_1, \dots, B_n$  de S, on dira que  $S_{gen} \Vdash C$  ssi A est forcé par  $S_{gen}$  et  $B_1, \dots, B_n$ .

On supposera, en plus des propriétés (C), (F), (L), la suivante:

- (T) pour tout atome clos A, il n'y a qu'un nombre fini d'atomes clos A' tels que  $A \succ A'$ .
- (T) implique (F), et n'est pas rigoureusement nécessaire, mais simplifiera les arguments de preuve.

Montrer que l'on peut toujours effacer les conclusions C des règles de résolution ordonnée avec sélection, ou de surréduction, dès que  $S_{gen} \Vdash C$ . On pourra montrer que dans la preuve de complétude (cours, théorème 8, modulo ajouts et modifications de la partie 1), l'étape de résolution (resp., de surréduction) trouvée grâce à l'arbre décoré  $T_S$  a une conclusion C qui ne vérifie jamais  $S_{gen} \Vdash C$ .

2. Difficulté: 25 lignes.

Dans le cours (oral), nous avons vu la classe  $\mathcal{H}_1$ , des clauses de Horn de la forme  $H \Leftarrow \mathcal{B}$ , où la tête H est de la forme  $\bot$  ou P(X) ou  $P(f(X_1, ..., X_n))$  avec  $X_1$ , ...,  $X_n$  deux à deux distinctes. Rappelons que l'on pouvait décider cette classe en utilisant comme ordre  $P(u) \succ Q(v)$  si v est un sous-terme strict de u, et comme fonction de sélection celle qui sélectionne les atomes de  $\mathcal{B}$  de la forme P(t) avec t non variable, ou bien tous les atomes de  $\mathcal{B}$  si la tête est de la forme  $\bot$  ou P(X) (X variable). (On ignore ici l'effet du splitting sans splitting, brièvement discuté en cours.)

Montrer que l'on peut décider (en temps polynomial) si  $S_{gen} \vdash C$  pour toute clause C de  $\mathcal{H}_1$ , et lorsque S est fini.