Programmation, TD 4: sémantique naturelle de mini-Caml

21 octobre 2002

On rappelle les règles de sémantique naturelle de mini-Caml :

$$\frac{}{\rho, \mu \vdash x \Rightarrow \mu, \rho(x)} \,(Var)$$

$$\frac{\rho, \mu \vdash M \Rightarrow \mu', \overbrace{(x, M', \rho')}^{\text{clôture}} \quad \rho, \mu' \vdash N \Rightarrow \mu'', V \quad \rho'[x := V], \mu'' \vdash M' \Rightarrow \mu''', V'}{\rho, \mu \vdash MN \Rightarrow \mu''', V'} \,(App)$$

$$\frac{}{\rho, \mu \vdash \texttt{fun}\, x \to M \Rightarrow \mu, \underbrace{(x, M, \rho)}_{\text{clôture}}} \,(Fun)$$

$$\frac{\rho, \mu \vdash M \Rightarrow \mu', V \quad a \in Addr \setminus \mathrm{dom}\mu'}{\rho, \mu \vdash \texttt{ref}\, M \Rightarrow \mu' \oplus \{a \mapsto V\}, V} \,(Ref)$$

$$\frac{\rho, \mu \vdash M \Rightarrow \mu', a \in \mathrm{dom}\mu'}{\rho, \mu \vdash !M \Rightarrow \mu', \mu'(a)} \,(Bang)$$

$$\frac{\rho, \mu \vdash M \Rightarrow \mu', a \in \mathrm{dom}\mu' \quad \rho, \mu' \vdash N \Rightarrow \mu'', V}{\rho, \mu \vdash M{:=}N \Rightarrow \mu''[a \mapsto V], V} \,(Assign)$$

Une *dérivation* est un arbre fini (inversé, comme d'habitude en informatique) de jugements, reliés par les règles de la sémantique. Par exemple, voici une dérivation d'un jugement pour l'expression $\texttt{x} := \texttt{fun y} \to \texttt{y}$:

$$\frac{\dfrac{}{\rho, \mu \vdash \texttt{x} \Rightarrow \mu, \rho(x)}\,(Var) \qquad \dfrac{}{\rho, \mu \vdash \texttt{fun y} \to \texttt{y} \Rightarrow \mu, (\texttt{y}, \texttt{y}, \rho)}\,(Fun)}{\rho, \mu \vdash \texttt{x} := \texttt{fun y} \to \texttt{y} \Rightarrow \mu[\rho(x) \mapsto (\texttt{y}, \texttt{y}, \rho)], (\texttt{y}, \texttt{y}, \rho)} \,(Assign)$$

À noter que cette dérivation n'est valide que si $\rho(x) \in \mathrm{dom}\mu$.

1. Question stupide : si une dérivation est un arbre fini, il faut bien qu'il se termine sur des feuilles. Quels jugements trouve-t-on aux feuilles ?
2. Décrire les règles de sémantique manquantes du langage mini-Caml : `let`, les constantes (0, etc.), les primitives ($+$, etc.), les n-uplets $(M_1, \ldots, M_n)$ et les projections $\pi_i M$, la séquence ;, les tests `if`.
3. Écrire la dérivation de sémantique naturelle la plus générale pour les expressions :

   $$(a)\ \texttt{x} := \texttt{fun y} \to \texttt{y}; !\texttt{xz} \qquad (b)\ \texttt{x} := \texttt{ref0}; (\texttt{x} := \texttt{fun y} \to \texttt{y} + \texttt{1})\texttt{1}$$

   Que pouvez-vous dire dans le cas (b) ? (Pensez ordre d'évaluation.)
4. Si $\rho(x) \notin \mathrm{dom}\mu$ dans l'exemple de dérivation donné en exergue, y a-t-il une dérivation sémantique pour l'expression $\texttt{x} := \texttt{fun y} \to \texttt{y}$? Donnez une preuve de votre affirmation. Décrivez intuitivement la raison de ce phénomène.
5. Pourquoi n'y a-t-il aucune dérivation de sémantique pour l'expression $(\texttt{funx} \to \texttt{xx})(\texttt{funx} \to \texttt{xx})$?

6. Et pour $\texttt{let x} = \texttt{ref}()\ \texttt{in}\ (\texttt{x} := (\texttt{fun y} \to \texttt{!x}()); \texttt{!x}())$?
7. On définit l'ensemble $\mathrm{fv}(M)$ des *variables libres* d'un terme M par récurrence structurelle sur M par :

$$\begin{array}{rcc} \mathrm{fv}(x) = \{x\} & \mathrm{fv}(MN) = \mathrm{fv}(M) \cup \mathrm{fv}(N) & \mathrm{fv}(\texttt{fun}\ x \to M) = \mathrm{fv}(M) \setminus \{x\} \\ \mathrm{fv}(\texttt{ref}\ M) = \mathrm{fv}(M) & \mathrm{fv}(!M) = \mathrm{fv}(M) & \mathrm{fv}(M{:=}N) = \mathrm{fv}(M) \cup \mathrm{fv}(N) \\ \mathrm{fv}(\texttt{0}) = \mathrm{fv}(\texttt{1}) = \ldots = \emptyset & \mathrm{fv}(M+N) = \ldots = \mathrm{fv}(M) \cup \mathrm{fv}(N) & \mathrm{fv}(M;N) = \mathrm{fv}(M) \cup \mathrm{fv}(N) \\ \mathrm{fv}((M_1, \ldots, M_n)) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{fv}(M_i) & \mathrm{fv}(\pi_i M) = \mathrm{fv}(M) & \\ \multicolumn{3}{c}{\mathrm{fv}(\texttt{if}\ M\ \texttt{then}\ N\ \texttt{else}\ P) = \mathrm{fv}(M) \cup \mathrm{fv}(N) \cup \mathrm{fv}(P) \qquad \mathrm{fv}(\texttt{let}\ x = M\ \texttt{in}\ N) = \mathrm{fv}(M) \cup (\mathrm{fv}(N) \setminus \{x\})} \end{array}$$

   Montrer que la sémantique d'une expression ne dépend que des valeurs de ses variables libres, autrement dit :

   Si $\rho, \mu \vdash M \Rightarrow \mu', V$ et $\rho'(x) = \rho(x)$ pour tout $x \in \mathrm{fv}(M)$, alors $\rho', \mu \vdash M \Rightarrow \mu', V$.
8. La sémantique d'un programme $\texttt{letrec}\ x_1{=}M_1;; \ldots;; \texttt{letrec}\ x_n{=}M_n;;$ est donnée d'une part par les règles :

$$\frac{\rho[x \mapsto (x', M', \rho')], \mu \vdash M \Rightarrow \mu', (x', M', \rho')}{\rho, \mu \vdash \texttt{letrec}\ x{=}M \Rightarrow \rho[x \mapsto (x', M', \rho')], \mu'}\ (Letrec)$$

   qui permet de dérivez de nouveaux jugements de la forme $\rho, \mu \vdash \texttt{letrec}\ x{=}M \Rightarrow \rho', \mu'$; ensuite (par exemple) par la règle :

$$\frac{\rho_0, \mu_0 \vdash \texttt{letrec}\ x_1{=}M_1 \Rightarrow \rho_1, \mu_1 \quad \ldots \quad \rho_{n-1}, \mu_{n-1} \vdash \texttt{letrec}\ x_n{=}M_n \Rightarrow \rho_n, \mu_n \qquad \rho_n, \mu_n \vdash \texttt{main}() \Rightarrow \mu, V}{\rho_0, \mu_0 \vdash \texttt{letrec}\ x_1{=}M_1;; \ldots;; \texttt{letrec}\ x_n{=}M_n;; \Rightarrow \mu, V}\ (Main)$$

   Décryptez la règle $(Letrec)$, justifiez. Notez que la règle $(Letrec)$ décrit un *point-fixe*…mais de quelle fonction ?
9. On souhaite implémenter le $\texttt{letrec}$ en évitant la règle "magique" $(Letrec)$. Expliquer intuitivement pourquoi on peut implémenter

$$\texttt{letrec}\ x = M;;$$

   par

$$\texttt{letrec}\ x = \texttt{let}\ xp = \texttt{ref}()\ \texttt{in}\ (xp := M[x \mapsto !xp]; !xp)$$

   où xp est un identificateur différent de x et non libre dans M, et où $M[x \mapsto N]$ dénote le remplacement textuel de x par le terme N dans le terme M. Noter que x n'est *plus libre* dans l'expression $\texttt{let}\ xp = \texttt{ref}()\ \texttt{in}\ (xp := M[x \mapsto !xp]; !xp)$, et utiliser la question 7 pour donner une simplification implémentable de la règle $(Letrec)$ dans ce cas.
10. Utilisez la technique de la question précédente sur la déclaration $\texttt{letrec}\ x = x;;$. Pourquoi la technique échoue-t-elle misérablement ?
11. Dans la suite, on supposera toujours que dans $\texttt{letrec}\ x = M;;$, M est restreinte à être de la forme $\texttt{fun}\ x \to M'$. Intuitivement, la traduction de la question 9 est maintenant correcte. Montrer que cette intuition est fausse, au sens où le théorème intuitif suivant est faux :

   Si $\rho, \mu \vdash \texttt{letrec}\ x = M \Rightarrow \rho', \mu'$ est dérivable par $(Letrec)$, alors
   $\rho, \mu \vdash \texttt{letrec}\ x = \texttt{let}\ xp = \texttt{ref}()\ \texttt{in}\ (xp := M[x \mapsto !xp]; !xp);; \Rightarrow \rho', \mu'$ est dérivable.

   Corrigez l'énoncé du théorème et prouvez-le. (Indication : seule une certaine partie "observable" de μ' devrait intervenir.)