En finir avec la terminaison ?

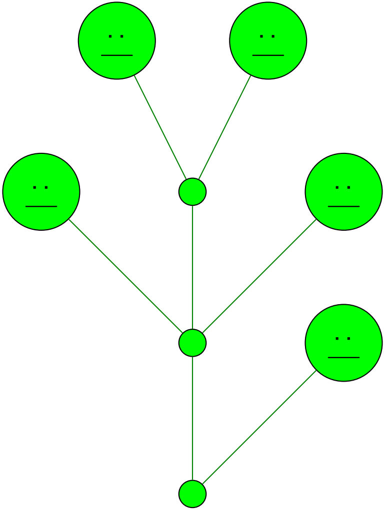
Guillaume Genestier

Jeudi 6 septembre 2018

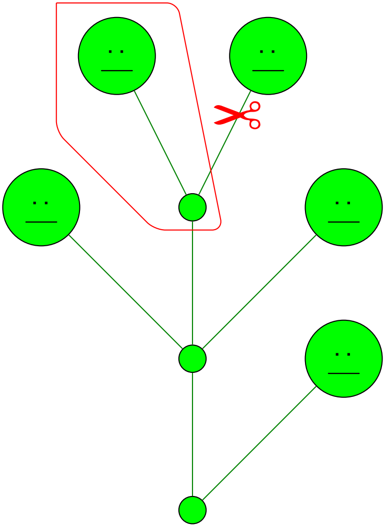
L'hydre de Lerne

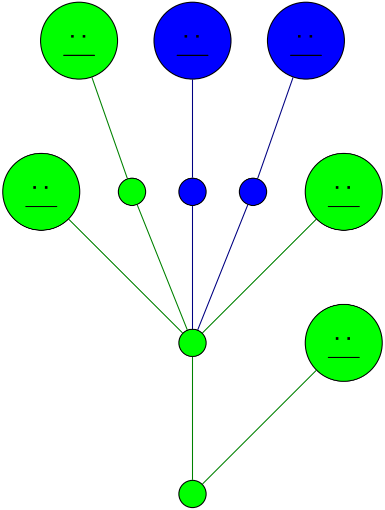
Franz von Stuck, *Hercule et l'hydre de Lerne*, 1915

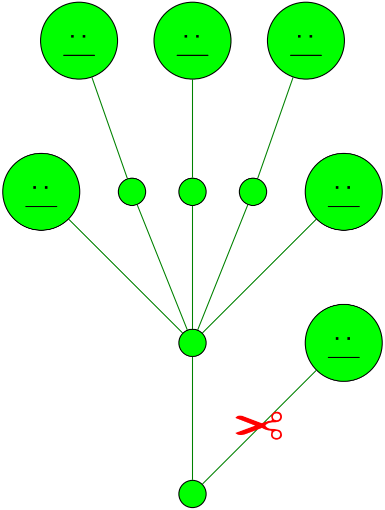
L'hydre de Kirby et Paris



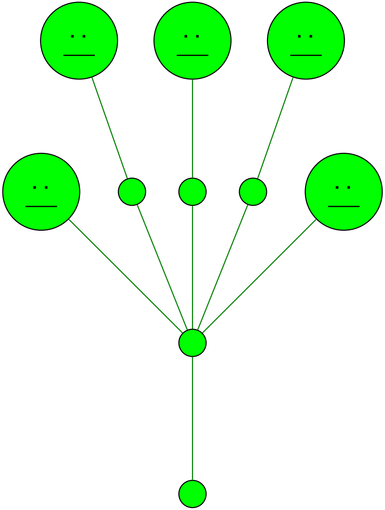
L'hydre de Kirby et Paris



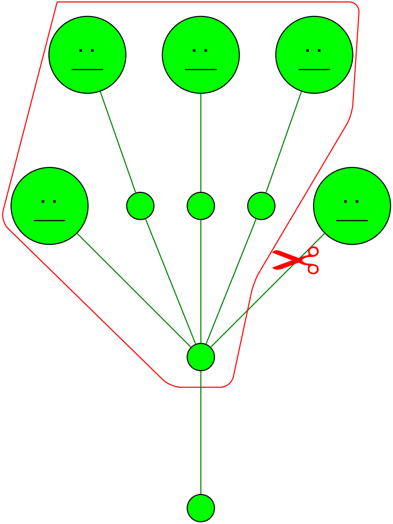




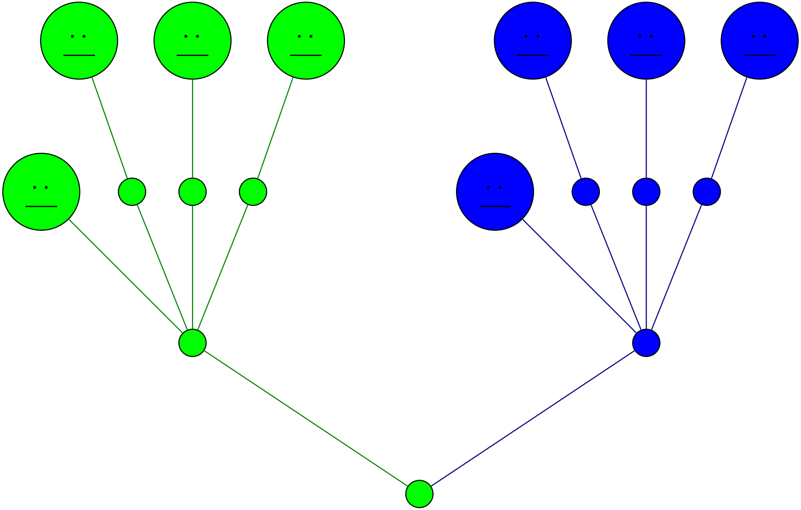
L'hydre de Kirby et Paris



L'hydre de Kirby et Paris

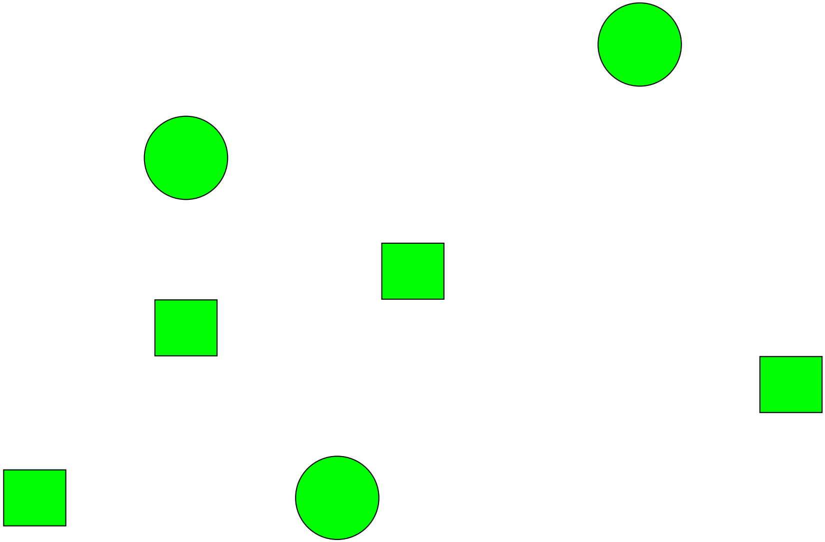


L'hydre de Kirby et Paris

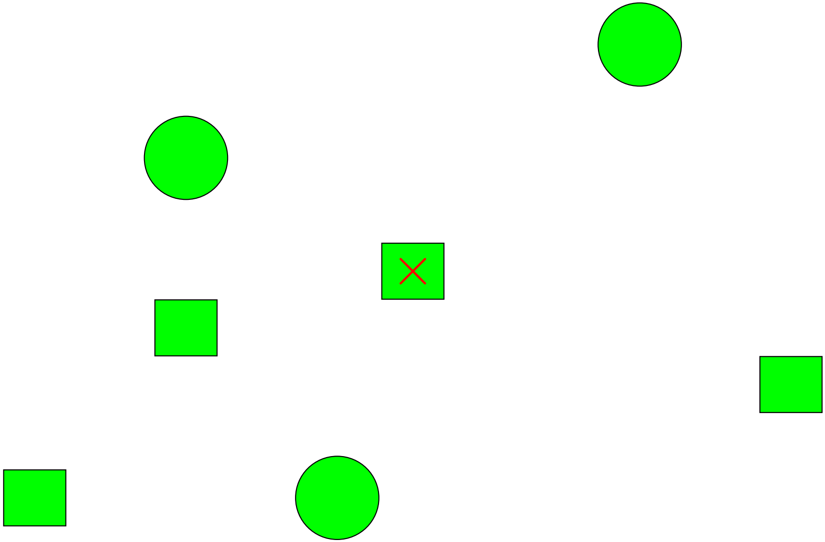


Hercule a-t-il une stratégie lui permettant de tuer l'hydre en temps fini ?

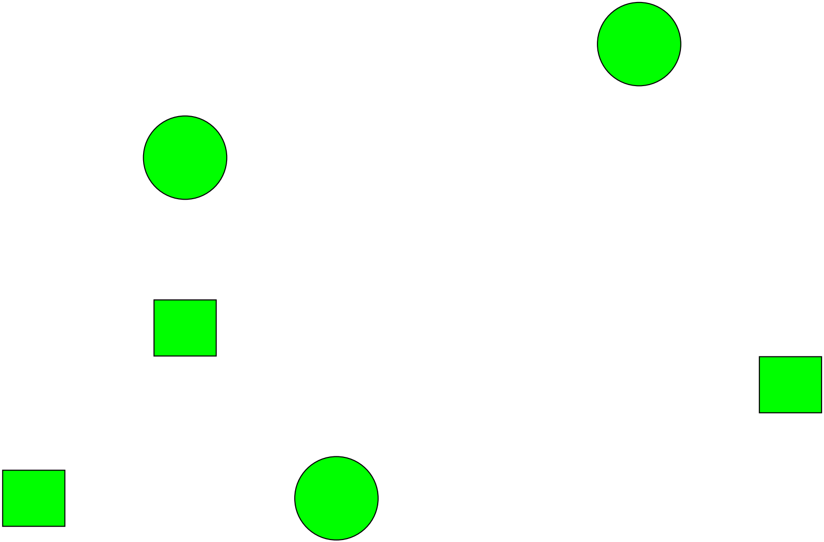
Un problème simple de terminaison

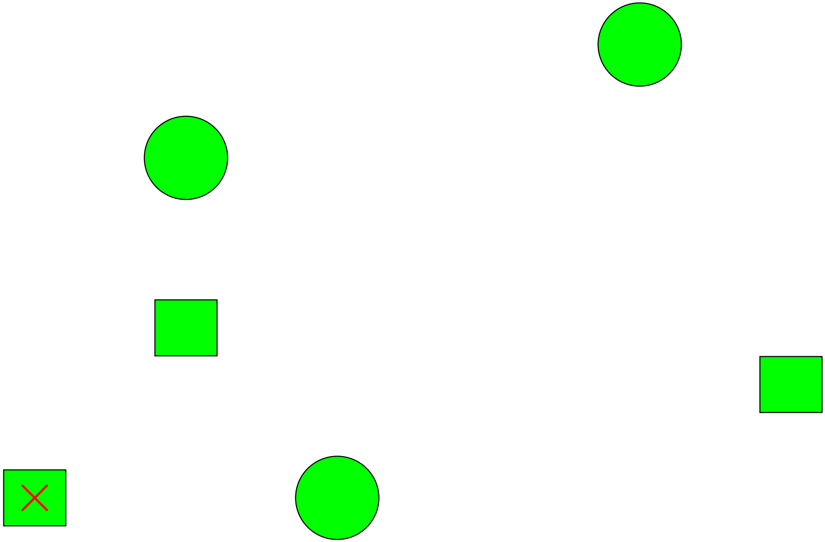


Un problème simple de terminaison

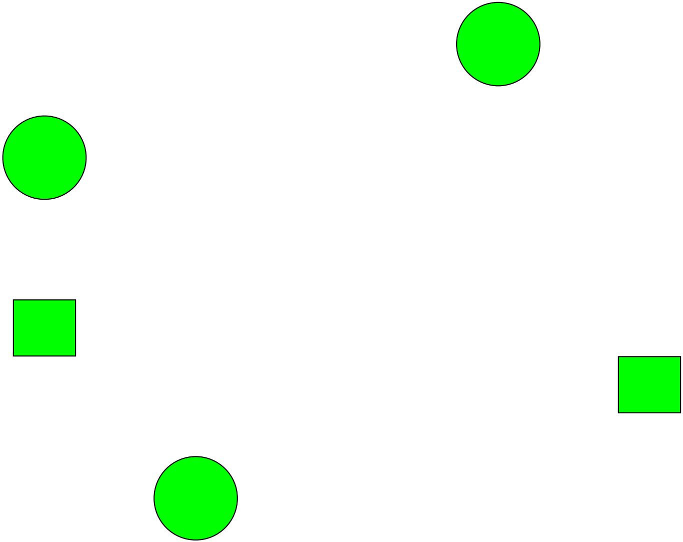


Un problème simple de terminaison

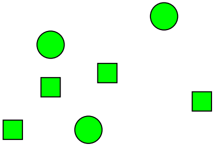
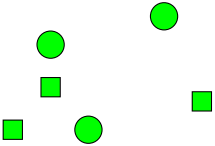
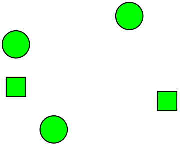


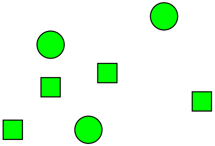
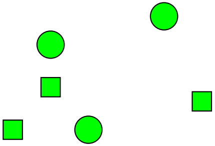
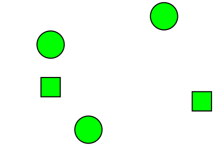


Un problème simple de terminaison



Une mesure entière

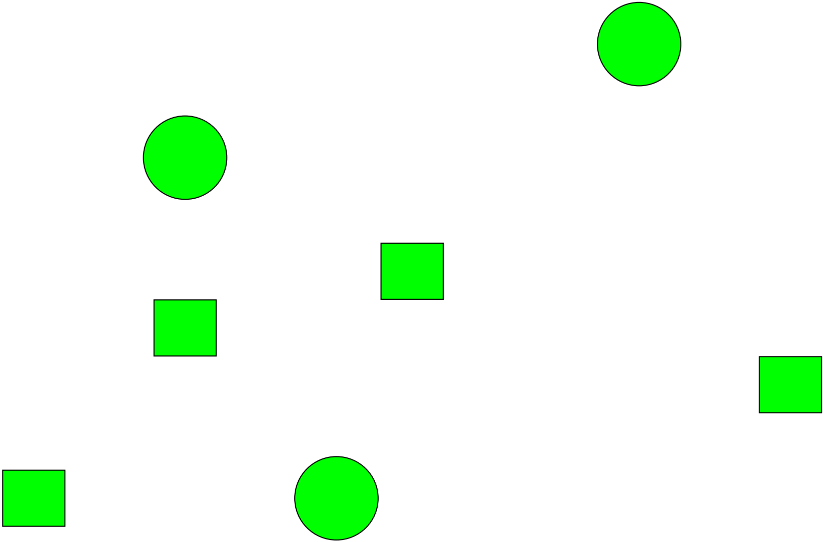
Exemple	# carrés
	4
	3
	2

Exemple	# carrés
	4
	3
	2

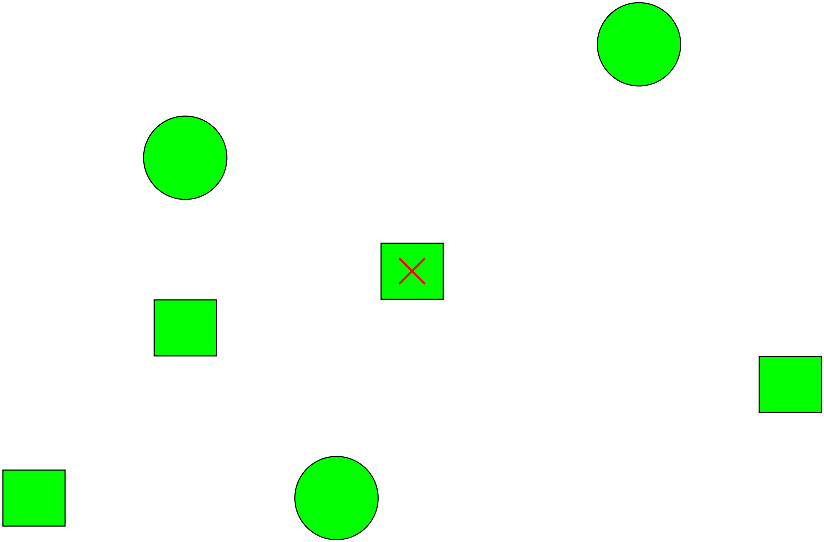
Et pour l'hydre ?

- Le nombre de têtes ?
- La profondeur ?

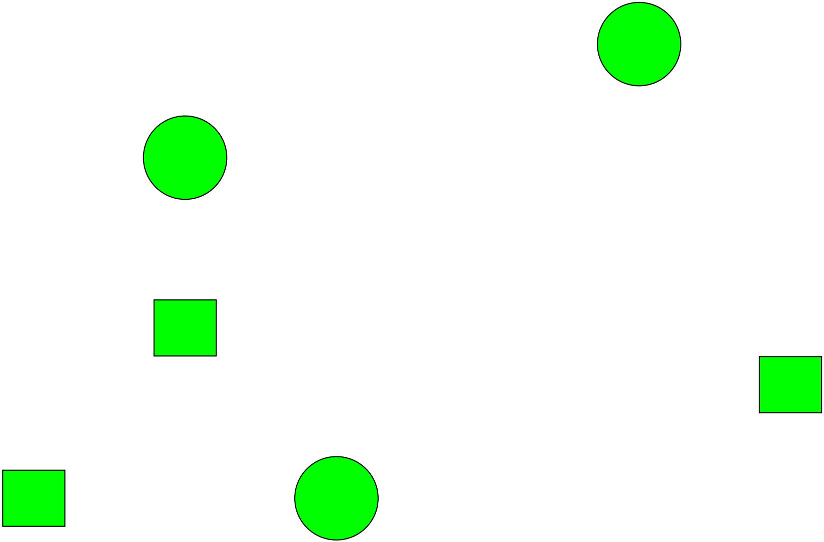
Une version plus proche de l'hydre



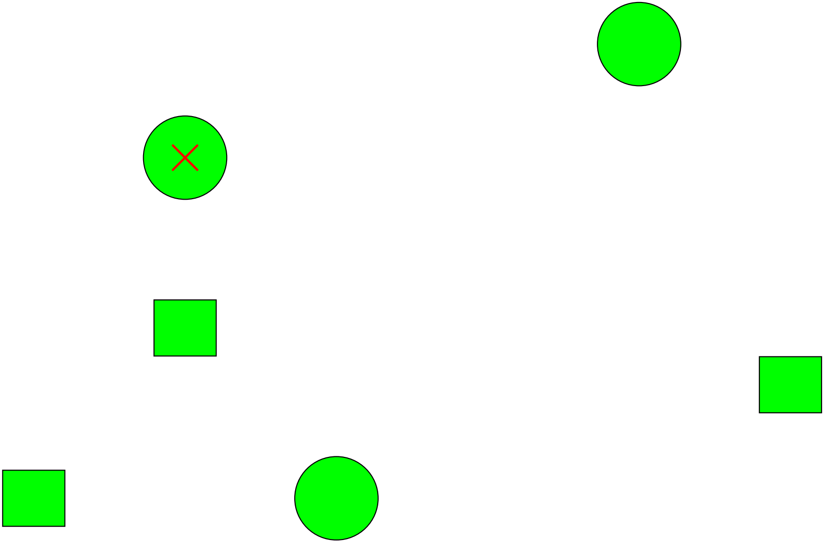
Une version plus proche de l'hydre



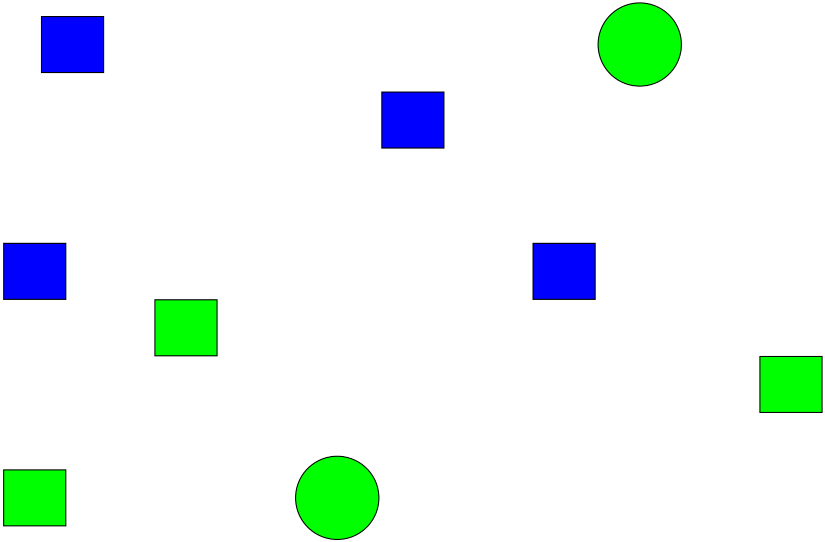
Une version plus proche de l'hydre



Une version plus proche de l'hydre



Une version plus proche de l'hydre



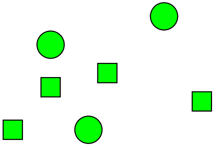
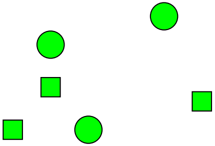
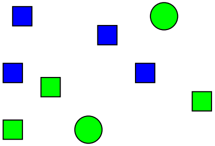
Définition

$(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ *si :*

- $a_1 < a_2$

  ou
- $a_1 = a_2$ *et* $b_1 < b_2$

C'est un ordre strict total sur $\mathbb{N}^2$.

Exemple	(# rond,# carrés)
	(3,4)
	(3,3)
	(2,7)

Et pour l'hydre ?

Procédure

Pour prouver la terminaison, il faut trouver <u>une mesure qui décroît à chaque étape</u>.

Une méthode générale

Procédure

Pour prouver la terminaison, il faut trouver une mesure qui décroît à chaque étape.

Mais si ça décroît sur $\mathbb{Z}$, ça ne garantit rien !

Une méthode générale

Procédure

Pour prouver la terminaison, il faut trouver une mesure qui décroît à chaque étape.

Mais si ça décroît sur $\mathbb{Z}$, ça ne garantit rien !

Procédure

Pour prouver la terminaison, il faut trouver une mesure sur un ordre possédant un minorant qui décroît à chaque étape.

Procédure

Pour prouver la terminaison, il faut trouver une mesure qui décroît à chaque étape.

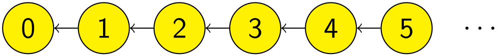
Mais si ça décroît sur $\mathbb{Z}$, ça ne garantit rien !

Procédure

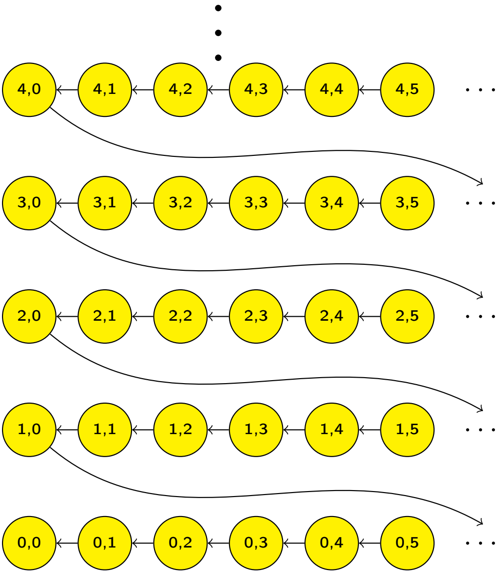
Pour prouver la terminaison, il faut trouver une mesure sur un ordre possédant un minorant qui décroît à chaque étape.

Et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$? Elle est strictement décroissante et minorée mais infinie.

Et pour l'ordre lexicographique, ça marchait pourtant



Et pour l'ordre lexicographique, ça marchait pourtant

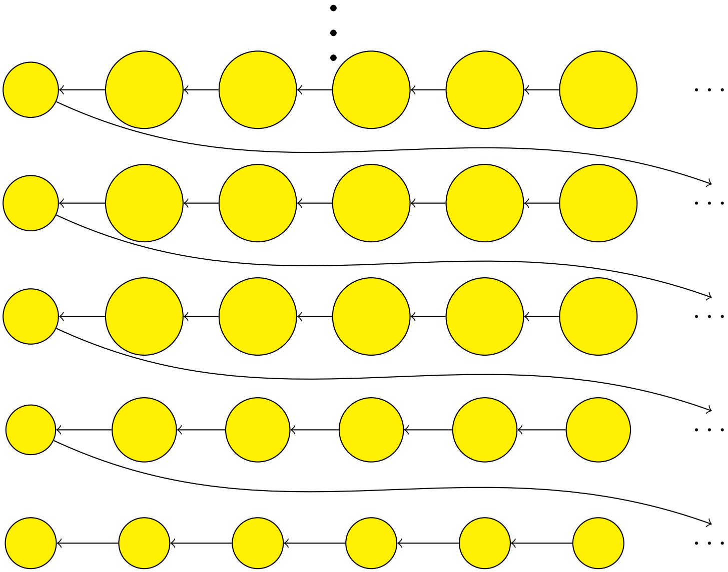


La bonne propriété

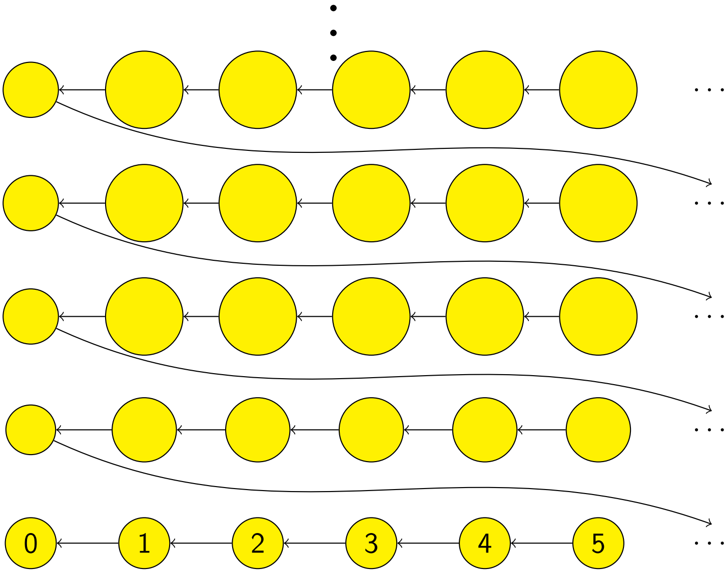
Définition (Ordre bien fondé)

Un ordre est dit bien fondé s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante.

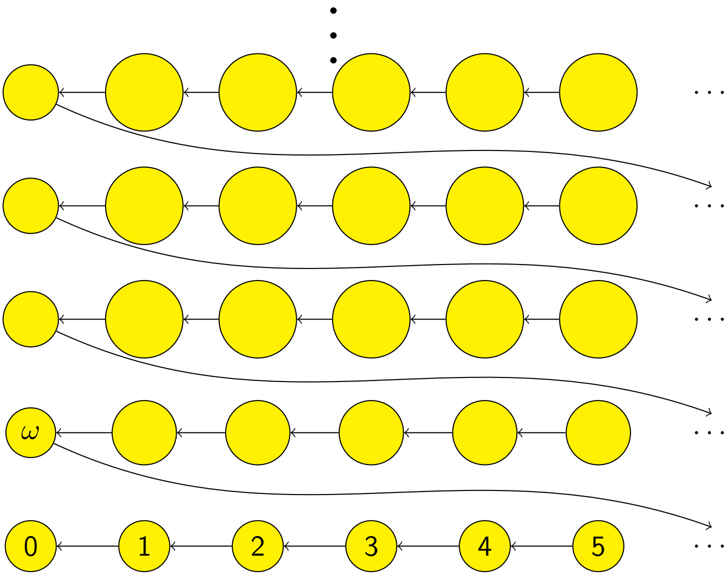
Numérotons dans l'ordre



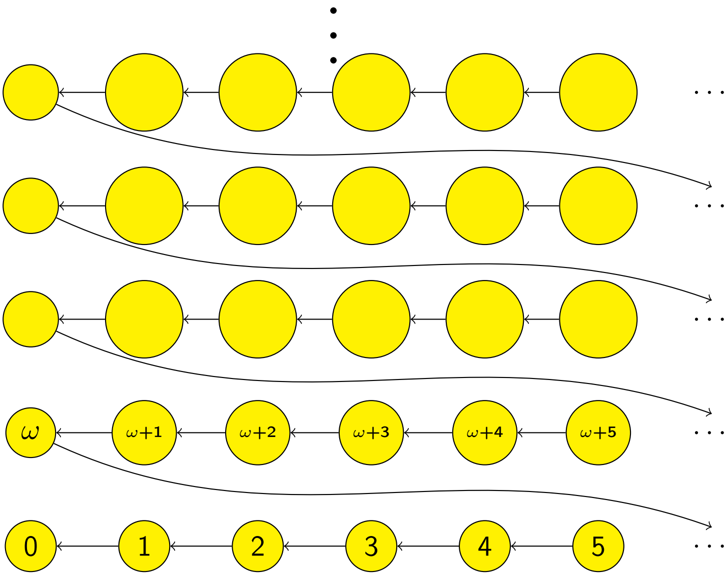
Numérotons dans l'ordre



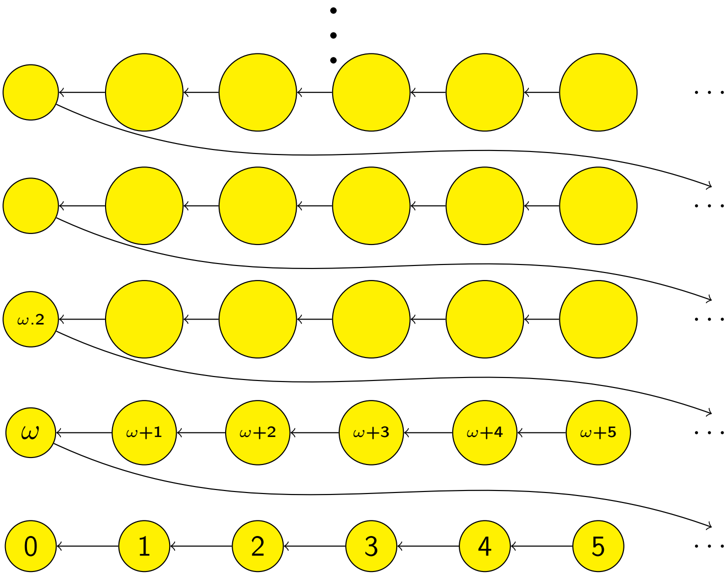
Numérotons dans l'ordre

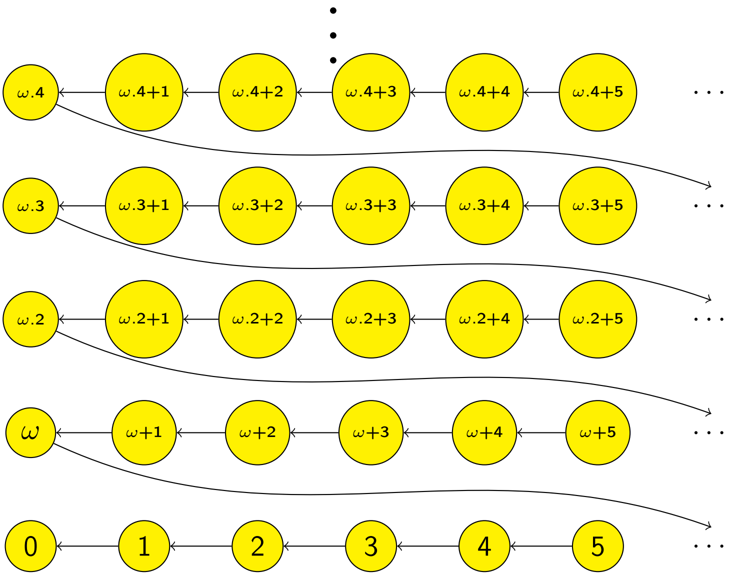


Numérotons dans l'ordre



Numérotons dans l'ordre



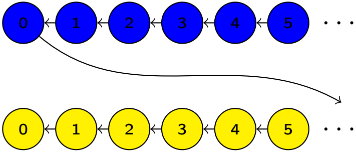
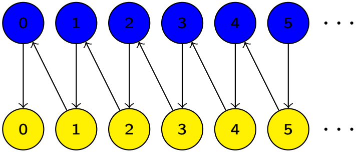

ω.4
ω.4+1
ω.4+2
ω.4+3
ω.4+4
ω.4+5
ω.3
ω.3+1
ω.3+2
ω.3+3
ω.3+4
ω.3+5
ω.2
ω.2+1
ω.2+2
ω.2+3
ω.2+4
ω.2+5
ω
ω+1
ω+2
ω+3
ω+4
ω+5
0
1
2
3
4
5

Nombres ordinaux et opérations

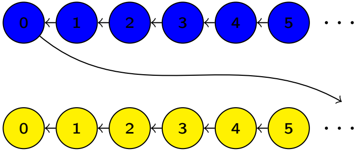
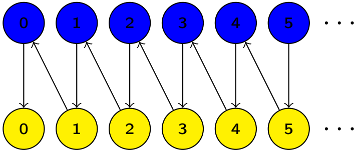
Définition (Ordinal)

Un ordre total bien fondé est appelé ordinal.

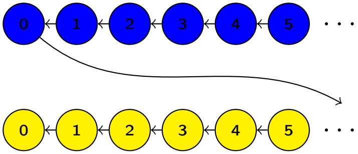
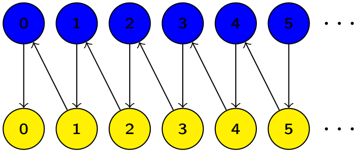
Ne pas confondre ordinal et cardinal

Représentation	Propriété	Ordinal
		
		

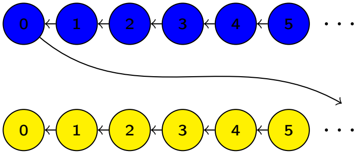
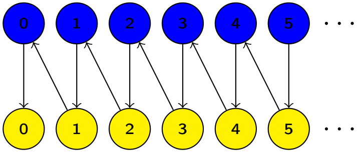
Ne pas confondre ordinal et cardinal

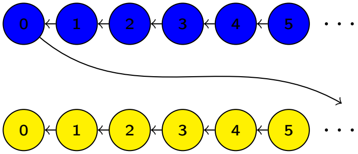
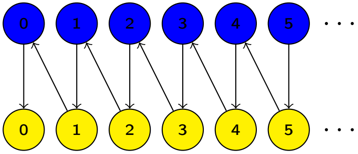
Représentation	Propriété	Ordinal
	Chaque point bleu a une infinité de points plus petits que lui.	
		

Ne pas confondre ordinal et cardinal

Représentation	Propriété	Ordinal
	Chaque point bleu a une infinité de points plus petits que lui.	
	Chaque point a un nombre fini de points plus petits que lui.	

Ne pas confondre ordinal et cardinal

Représentation	Propriété	Ordinal
	Chaque point bleu a une infinité de points plus petits que lui.	$\omega + \omega$
	Chaque point a un nombre fini de points plus petits que lui.	

Représentation	Propriété	Ordinal
	Chaque point bleu a une infinité de points plus petits que lui.	$\omega + \omega$
	Chaque point a un nombre fini de points plus petits que lui.	ω

Définition (Addition)

Si α et β sont deux ordinaux, $\alpha + \beta$ désigne l'union disjointe de α et β avec $x < y$ si :

- $x \in \alpha$, $y \in \alpha$ *et* $x <_\alpha y$

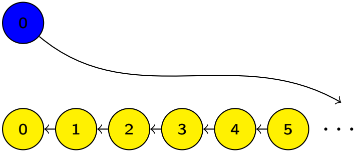
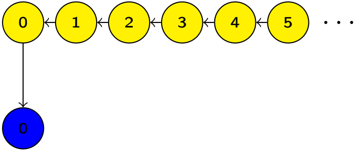
ou

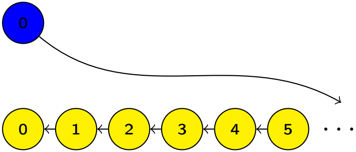
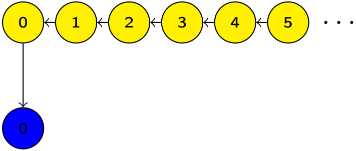
- $x \in \beta$, $y \in \beta$ *et* $x <_\beta y$

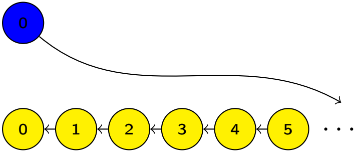
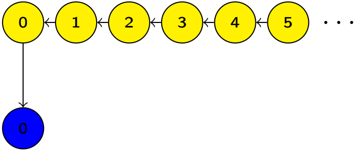
ou

- $x \in \alpha$ *et* $y \in \beta$

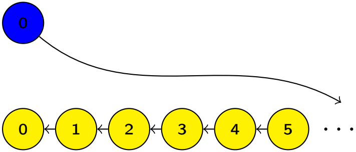
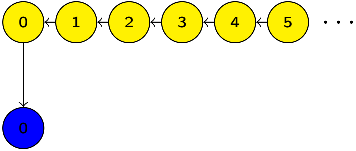
Non-commutativité

Ordinal	Représentation	Propriété
$\omega + 1$		
$1 + \omega$		

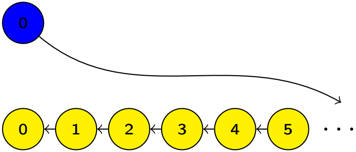
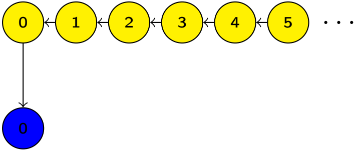
Ordinal	Représentation	Propriété
$\omega + 1$		Le point bleu a une infinité de points plus petits que lui.
$1 + \omega$		

Ordinal	Représentation	Propriété
$\omega + 1$		Le point bleu a une infinité de points plus petits que lui.
$1 + \omega$		Chaque point a un nombre fini de points plus petits que lui.

Non-commutativité

Ordinal	Représentation	Propriété
$\omega + 1$		Le point bleu a une infinité de points plus petits que lui.
$1 + \omega$		Chaque point a un nombre fini de points plus petits que lui.

$\neq \omega$

Ordinal	Représentation	Propriété	
$\omega + 1$		Le point bleu a une infinité de points plus petits que lui.	$\neq \omega$
$1 + \omega$		Chaque point a un nombre fini de points plus petits que lui.	$= \omega$

Multiplication

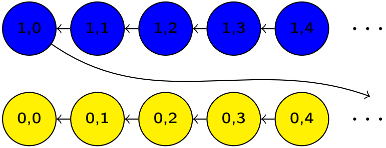
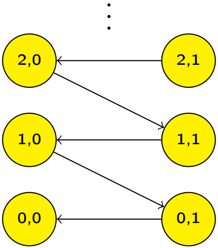
Définition (Multiplication)

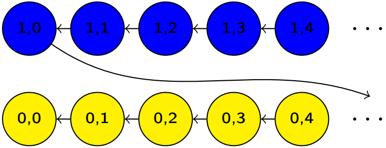
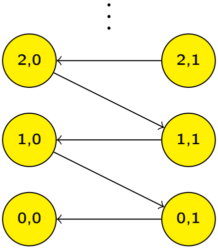
Si α et β sont deux ordinaux, $\alpha.\beta$ désigne le produit cartésien de α et β avec l'ordre anti-lexicographique $(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$ si :

- $y_1 <_\beta y_2$

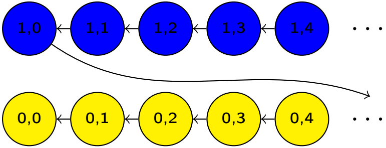
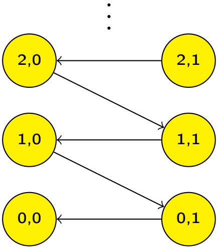
ou

- $y_1 = y_2$ *et* $x_1 <_\alpha x_2$

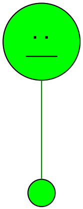
Ordinal	Représentation	Propriété
$\omega.2$		
$2.\omega$		

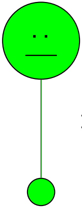
Ordinal	Représentation	Propriété
$\omega.2$		Chaque point bleu a une infinité de points plus petits que lui.
$2.\omega$		

$\neq \omega$

Ordinal	Représentation	Propriété	
$\omega.2$		Chaque point bleu a une infinité de points plus petits que lui.	$\neq \omega$
$2.\omega$		Chaque point a un nombre fini de points plus petits que lui.	$= \omega$

Revenons à l'hydre

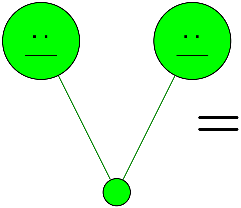




$=1$

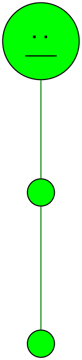
$$=2\,?$$

Revenons à l'hydre

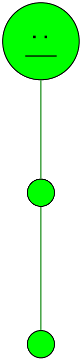


$=2$

Revenons à l'hydre

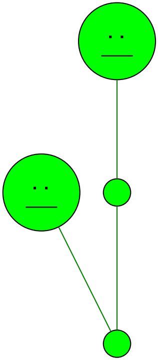


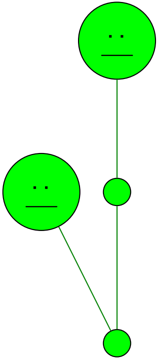
Revenons à l'hydre



$$= \omega$$

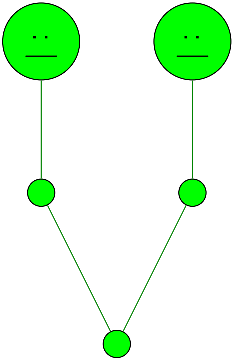
Revenons à l'hydre





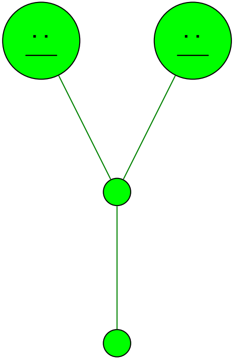
$$= \omega + 1$$

$$= \omega.2\,?$$

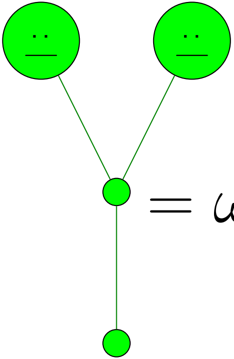


$= \omega.2$

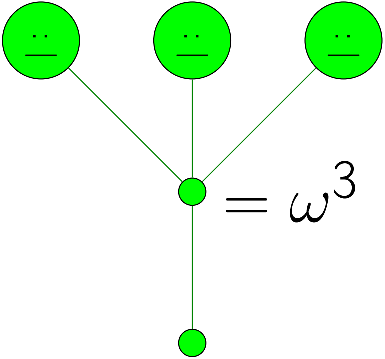
Revenons à l'hydre



Revenons à l'hydre

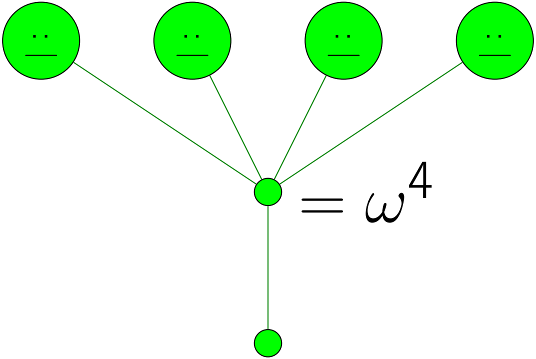


$$= \omega^2$$

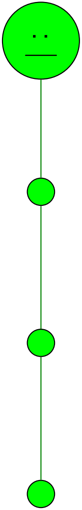


$$= \omega^3$$

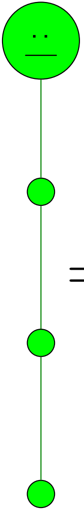
Revenons à l'hydre



$$= \omega^4$$



Revenons à l'hydre



$$= \omega^{\omega}$$

Toujours plus grand

$$\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \varepsilon_0$$