TD9 - Calcul des séquents du premier ordre

Exercice 1. Quelques preuves

Démontrer en calcul des séquents classique les jugements suivants quand c'est possible. Sinon, donner un modèle falsifiant le séquent.

Question 1. $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x))$

Question 2. $(\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x)) \vdash \forall x.(P(x) \vee Q(x))$

Question 3. $\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\forall x.P(x) \rightarrow \forall x.Q(x))$

Question 4. $P(0), \forall x.(P(x) \rightarrow P(S(x))) \vdash P(S(S(S(0))))$

Exercice 2. Des énoncés en français

Formaliser en logique des prédicats du premier ordre les énoncés suivants et les démontrer en calcul des séquents classique.

Question 5. Une relation symétrique transitive et totale à gauche est réflexive.

Question 6. Dans tout bar (non vide) il existe un client, appelé le buveur, tel que si le buveur boit tout le monde boit.

Question 7. Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles ne se contenant pas eux-mêmes.

Question 8. Une involution est une bijection.

Exercice 3. Permutons les règles

On considère une démonstration dont les deux premières règles s'appliquent à des propositions distinctes :

$$\cfrac{\cfrac{}{}\,\mathrm{R}}{}\,\mathrm{R'} \qquad \text{ou} \qquad \cfrac{\cfrac{}{}\,\mathrm{R} \quad \cfrac{}{}\,\mathrm{R}}{}\,\mathrm{R'}$$

(Dans le cas de droite, la règle R s'applique 2 fois à la même proposition).

Question 9. Montrer que si R et R' sont des règles portant sur les connecteurs propositionnels, elles commutent.

Question 10. Montrer que la contraction commute avec toutes les règles portant sur les connecteurs propositionnels.

Exercice 4. Théorème de Herbrand

Définition 1. Soit A une proposition prénexe close de la forme $\mathcal{Q}_1 x_1 . \dots . \mathcal{Q}_n x_n . C$. On appelle *instance close* de A une proposition close de la forme σC où σ est une substitution de domaine $x_1, \dots, x_n$.

Question 11. Soit $A_1, \dots, A_n$ des propositions existentielles closes et Γ, Δ des multiensembles de propositions closes sans quantificateurs. Montrer que si le langage contient au moins une constante, alors le séquent $\Gamma \vdash A_1, \dots, A_n, \Delta$ est démontrable dans le calcul des séquents sans coupures si et seulement s'il existe des instances closes $A_1^1, \dots, A_1^{p_1}$ de A_1, …, $A_n^1, \dots, A_n^{p_n}$ de A_n telles que le séquent sans quantificateurs $\Gamma \vdash A_1^1, \dots, A_1^{p_1}, \dots, A_n^1, \dots, A_n^{p_n}, \Delta$ soit démontrable dans le calcul des séquents sans coupures.

Exercice 5. Théorème de Löwenheim-Skolem descendant

Définition 2 (Sous-structure élémentaire). $\mathfrak{M}$ est une *sous-structure élémentaire* de $\mathfrak{N}$ si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ telle que pour tout formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,

$$\mathfrak{M} \vDash \phi(\bar{m}) \text{ si et seulement si } \mathfrak{N} \vDash \phi(\bar{m})$$

On note alors $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$.

Question 12. Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Montrer que $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ si et seulement si pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, si $\mathfrak{N} \vDash \exists x .\, \phi(x, \bar{m})$ alors il existe un $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{N} \vDash \phi(m_0, \bar{m})$.

Question 13. Soit B infini tel que $|B| \geqslant |\mathcal{F}| =$. Montrer que le plus petit sous ensemble de M contenant B et clos par les fonctions du langage est de la même cardinalité que B.

On définit alors

- A_0 est le plus petit sous ensemble de M contenant A et clos par les fonctions du langage,
- Supposons A_i défini. Pour chaque formule $F[v_0, \dots, v_n]$ et chaque $(a_1, \dots, a_n)$ de A_i, si $\mathfrak{M} \vDash \exists v_0 . F[v_0, a_1, \dots, a_n]$ alors on choisit un point $c_{F,a_1,\dots,a_n}$ de M tel que $\mathfrak{M} \vDash F[c_{F,a_1,\dots,a_n}, a_1, \dots, a_n]$. On pose :

  $$B_i = A_i \cup \{\, c_{F,a_1,\dots,a_n} \,|\, n \in \mathbb{N}, F[v_0, \dots, v_n] \text{ une formule}, (a_1, \dots, a_n) \in A_i^n, \mathfrak{M} \vDash \exists v_0 . F[v_0, a_1, \dots, a_n]\}$$

- A_{i+1} est le plus petit sous ensemble de M contenant B_i et clos par les fonctions du langage,

Question 14. Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure infinie et A un sous-ensemble de N. Soit κ un cardinal infini tel que $\max(|A|, |\mathcal{F}|, |\mathcal{P}|) \leqslant \kappa \leqslant |\mathfrak{N}|$. Alors il y a une sous-structure élémentaire $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ contenant A et de cardinal κ.