TD7 - Calcul des séquents propositionnel classique

Exercice 1. Vrai ou faux

Question 1. Un jugement $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable en déduction naturelle classique si et seulement si le séquent $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable en calcul des séquents classique.

Question 2. Si un système d'inférence est correct et permet de dériver $\perp$ de tout ensemble de formules insatisfaisable, alors il est complet.

Question 3. Si $I \subseteq \mathcal{P}$ et $J \subseteq \mathcal{P}$ sont deux modèles d'une formule ϕ construite sur les variables propositionnelles $\mathcal{P}$, alors $I \cap J \vDash \phi$.

Question 4. Pour tout ensemble de formules propositionnelles S satisfaisable, il existe un modèle fini, *ie.* une interprétation $I \subseteq \mathcal{P}$ telle que $I \vDash S$ et I est fini.

Question 5. Pour tout ensemble de formules propositionnelles S insatisfaisable, il existe $S' \subseteq S$ tel que S' est fini et insatisfaisable.

Question 6. Si $S \vDash p$ où S est un ensemble de clauses et $p \in \mathcal{P}$, alors p se déduit de S par résolution et factorisation.

Question 7. Le stratégie de résolution dite *input* est réfutationnellement complète. On rappelle que la stratégie *input* consiste à restreindre la règle de résolution en imposant qu'au moins une des deux clauses de la prémisse est une des clauses de l'ensemble de clauses initial.

Question 8. $p \vee \neg p$ est prouvable en $\mathbf{NK}_0$ (la déduction naturelle classique).

Question 9. Pout tout multi-ensemble de formules Γ, pour toutes formules ϕ, ψ,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LJ}_0} \phi \vee \psi \qquad \text{ssi} \qquad \Gamma \vdash_{\mathbf{LJ}_0} \phi \text{ ou } \Gamma \vdash_{\mathbf{LJ}_0} \psi$$

où $\Gamma \vdash_{\mathbf{LJ}_0} \chi$ signifie que le séquent $\Gamma \vdash \chi$ est prouvable dans le calcul des séquents intuitionniste $\mathbf{LJ}_0$.

Exercice 2. Des preuves dans $\mathbf{LK_0}$

Question 10. $\vdash (P \to Q) \vee P$

Question 11. $((P \vee R) \wedge (Q \vee R)) \vdash (R \vee (P \wedge Q))$

Exercice 3. Clauses de Horn dans $\mathbf{LK_0^-}$

On considère la restriction *input* de $\mathbf{LK_0^-}$ où l'on force la prémisse gauche de la règle d'implication à être un axiome :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \phi}\,\text{Ax} \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \to \psi \vdash \Delta}\,\to\text{L}$$

Question 12. Montrer que cette stratégie n'est pas complète en général.

Question 13. On considère maintenant le cas particulier d'un séquent $\Gamma \vdash A$ où A est un litéral positif et les formules de Γ sont de la forme $A_1 \to \cdots \to A_n \to A_{n+1}$ où les A_i sont aussi des littéraux positifs. Montrer que si un séquent de cette forme est prouvable dans $\mathbf{LK_0^-}$ alors il est aussi prouvable en respectant la stratégie *input*.

Question 14. En déduire un algorithme en temps polynomial pour décider $\Gamma \vDash A$.

Exercice 4. Il n'y a pas de petite preuve du principe des tiroirs dans $\mathbf{LK_0^-}$

Soit $\mathcal{P}_n = \{\, A_{i,j} | \, 1 \leqslant i \leqslant n+1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ un ensemble de variables propositionnelles paramétré par $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Gamma_n = \left\{\, \bigvee_{j=1}^{n} A_{i,j} \middle| \, 1 \leqslant i \leqslant n+1 \right\}$ et $\Delta_n = \{\, A_{i_1,j} \wedge A_{i_2,j} | \, 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n+1\}$.

Dans tout l'exercice, on ne considère que des séquents $\Gamma \vdash \Delta$ construits sur les variables propositionnelles et les seuls connecteurs $\wedge$, $\vee$. Si σ est une application d'un sous-ensemble des variables propositionnelles de $\mathcal{P}$ dans $\{\top, \bot\}$, on définit :

- $P^\sigma = \sigma(P)$ si P est dans le domaine de σ, sinon $P^\sigma = P$,
- $(\phi \vee \psi)^\sigma = \top$ si $\phi^\sigma = \top$ ou $\psi^\sigma = \top$. $(\phi \vee \psi)^\sigma = \psi^\sigma$ si $\phi^\sigma = \bot$. $(\phi \vee \psi)^\sigma = \phi^\sigma$ si $\psi^\sigma = \bot$. Dans les autres cas, $(\phi \vee \psi)^\sigma = \phi^\sigma \vee \psi^\sigma$.
- $(\phi \wedge \psi)^\sigma = \bot$ si $\phi^\sigma = \bot$ ou $\psi^\sigma = \bot$. $(\phi \wedge \psi)^\sigma = \psi^\sigma$ si $\phi^\sigma = \top$. $(\phi \wedge \psi)^\sigma = \phi^\sigma$ si $\psi^\sigma = \top$. Dans les autres cas, $(\phi \wedge \psi)^\sigma = \phi^\sigma \wedge \psi^\sigma$.
- $(\phi_1, \dots, \phi_p)^\sigma \vdash (\psi_1, \dots, \psi_q)^\sigma$ est le séquent $\phi_1^\sigma, \dots, \phi_p^\sigma \vdash \psi_1^\sigma, \dots, \psi_q^\sigma$

Si γ est une application d'un ensemble de variables $\mathcal{P}$ dans un ensemble de variables $\mathcal{Q}$, γ s'étend aux formules par $\gamma(\phi \wedge \psi) = \gamma(\phi) \wedge \gamma(\psi)$ et $\gamma(\phi \vee \psi) = \gamma(\phi) \vee \gamma(\psi)$.

On dit que $\Gamma_n \vdash \Delta_n$ se plonge dans $\Gamma \vdash \Delta$ s'il existe une fonction σ définit sur un sous-ensemble des variables propositionnelles de $\Gamma \vdash \Delta$ et une injection γ de $\mathcal{P}_n$ dans l'ensemble des variables propositionnelles de $\Gamma \vdash \Delta$ telle que $\Gamma^\sigma \vdash \Delta^\sigma = \gamma(\Gamma_n \vdash \Delta_n)$.

Question 15. Montrer que si π est une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ dans le calcul des séquents sans coupure, alors, pour tout σ, il existe une preuve de $\Gamma^\sigma \vdash \Delta^\sigma$ de taille inférieure ou égale à celle de π dans le calcul des séquents sans coupure.

Question 16. Soit $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent tel que toutes les formules de Γ sont construites à l'aide des variables propositionnelles et du seul connecteur $\vee$ e toutes les formules de Δ sont construites à l'aide des variables propositionnelles et du seul connecteur $\wedge$. Supposons que $\Gamma \vdash \Delta$ s'obtient, soit par introduction du $\vee$ à gauche, soit par introduction du $\wedge$ à droite, à partir des séquents $\Gamma' \vdash \Delta'$ et $\Gamma'' \vdash \Delta''$.

Montrer que si $\Gamma_{n+1} \vdash \Delta_{n+1}$ se plonge dans $\Gamma \vdash \Delta$, alors

- ou bien $\Gamma_n \vdash \Delta_n$ se plonge dans $\Gamma' \vdash \Delta'$ et dans $\Gamma'' \vdash \Delta''$
- ou bien $\Gamma_{n+1} \vdash \Delta_{n+1}$ se plonge dans l'un des séquents $\Gamma' \vdash \Delta'$ ou $\Gamma'' \vdash \Delta''$.

Question 17. Montrer que toute preuve de $\Gamma_n \vdash \Delta_n$ dans le calcul des séquents sans coupure est de taille au moins $2^n - 1$.