TD5 - Sémantique de Kripke et déduction naturelle propositionnelle intuitionniste

Soit $\mathcal{K} = (W, \geqslant, \alpha)$ une structure de Kripke. On définit $I : P \mapsto \{ w \in W \,|\, P \in \alpha(w)\}$.

Exercice 1.

Soit $\mathcal{K} = (W, \geqslant, \alpha)$ une structure de Kripke, P, Q des variables propositionnelles et $w \in W$.

Question 1. Que signifie $w \vDash \neg\neg P$?

Question 2. Que signifie $w \vDash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$?

Exercice 2. Des tautologies classiques

Donner une dérivation ou un contre-modèle justifiant pour chaque formule si elle est ou non intuitionnistiquement valide.

Question 3. $\neg(P \wedge \neg P)$

Question 4. $P \to \neg\neg P$

Question 5. $\neg\neg P \to P$

Question 6. $\neg\neg\neg P \to \neg P$

Question 7. $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$

Question 8. $\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$

Question 9. $\neg P \vee \neg\neg P$

Question 10. $(\neg P \to \neg Q) \to Q \to P$

Exercice 3. Des structures de Kripke qui ne sont pas universelles

On considère la structure de Kripke construite comme les arbres sémantiques vus précédemment en cours. On suppose $\mathcal{P} = \{ P_i |\, i \in \mathbb{N}\}$ On prend comme monde les w_I où I est une interprétation partielle de domaine $\{ P_i |\, i \leqslant n\}$ pour un certain n. On pose $\alpha(w_I) = \{ P_i |\, I(P_i) = 1\}$. On pose enfin $w_I \leqslant w_J$ si J prolonge I, *ie.* le domaine de I est inclus dans celui de J et pour tout P dans le domaine de I, $I(P) = J(P)$.

Question 11. Montrer que cette structure réfute $X \vee \neg X$

Question 12. Donner une formule satisfaite dans cette structure mais non valide en logique intuitionniste.

On considère la structure de Kripke dont les mondes sont les interprétations partielles, *ie.* les couples (I, f) où I est un sous-ensemble de variables et $f : I \to \{0,1\}$, ordonnées comme précédemment par le prolongement. On pose également $\alpha(I,f) = \{\, P \in I \,|\, f(P) = 1\}$.

Question 13. Montrer que cette structure réfute $X \vee \neg X$

Question 14. Donner une formule satisfaite dans cette structure mais non valide en logique intuitionniste.

Exercice 4. Sémantique de Tarski

On considère une autre sémantique, dans laquelle les formules sont interprétées comme des ouverts d'un espace topologique. Soit (A, O) un espace topologique (*ie.* $(O \subseteq \mathcal{P}(A)$ tel que $\emptyset \in O$, $A \in O$ et O est stable par union quelconque et intersection finie) et I une fonction des variables propositionnelles vers O. On interprète une formule ϕ par un ouvert ϕ_I défini par récurrence sur ϕ :

$$P_I = I(P) \qquad \bot_I = \emptyset \qquad \top_I = A \qquad (\phi \wedge \psi)_I = \phi_I \cap \psi_I \qquad (\phi \vee \psi)_I = \phi_I \cup \psi_I$$

$$(\neg\phi)_I = \text{intérieur de } \phi_I^{\complement} \qquad (\phi \to \psi)_I = \text{intérieur de } (\phi_I^{\complement} \cup \psi_I)$$

Un jugement $\Gamma \vdash \phi$ est valide dans la sémantique de Tarski si pour toute interprétation de Tarski I, $\bigcap_{\psi \in \Gamma} \psi_I \subseteq \phi_I$

Question 15. Montrer que $\vdash P \vee \neg P$ n'est pas valide.

Question 16. Montrer que, dans le cas d'un Γ fini, les règles de la déduction naturelle intuitionniste sont correctes vis-à-vis de la sémantique de Tarski.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble muni d'un pré-ordre. On appelle $(E, \{\, X \subseteq E \,|\, \text{Si } x \in X, \text{ pour tout } y \geqslant x, y \in X\})$ topologie d'Alexandroff associée.

Question 17. Montrer que $\mathbf{NJ}_0$ est complète pour la sémantique de Tarski.

Exercice 5. Complétude fonctionnelle

$\otimes$ est indépendant d'un ensemble de connecteurs C s'il n'existe pas de formule ϕ dont les variables sont P et Q et ne contenant que des connecteurs de C telle que $\vdash (P \otimes Q) \leftrightarrow \phi$ soit prouvable en logique intuitionniste.

Question 18. Montrer que pour toutes formules ϕ et ψ, $\vdash \neg\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi)$ et $\vdash \neg\neg(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi)$ sont prouvables en logique intuitionniste.

Question 19. Montrer que si $\vee$ n'est pas indépendant de $\{\bot, \wedge, \neg, \to\}$, alors $\vdash \neg\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\phi \vee \neg\neg\psi)$ est prouvable intuitionnistiquement.

Question 20. Conclure.

On considère maintenant la structure de Kripke K possédant 3 mondes $\{w_1, w_2, w_3\}$ telle que $w_1 \leqslant w_3$ et $w_2 \leqslant w_3$ et avec $I(P) = \{w_1, w_3\}$ et $I(Q) = \{w_2, w_3\}$.

Question 21. Montrer que pour toute formule ϕ ne contenant que P, Q, $\bot$, $\neg$, $\vee$ et $\to$, si $w_3 \vDash \phi$ alors $w_1 \vDash \phi$ ou $w_2 \vDash \phi$.

Question 22. Conclure que $\wedge$ est indépendant de $\{\bot, \vee, \neg, \to\}$.