TD4 - Déduction naturelle classique

Exercice 1. Règles admissibles

Question 1. *Ex falso quodlibet* : Montrer que si $\Gamma \vdash \bot$ est prouvable dans $\mathbf{NK_0}$, alors $\Gamma \vdash \phi$ l'est aussi.

Question 2. *Coupure* : Montrer que si $\Gamma, \phi \vdash \psi$ et $\Gamma \vdash \phi$ sont prouvables dans $\mathbf{NK_0}$, alors $\Gamma \vdash \psi$ l'est aussi.

Question 3. *Résolution* : Montrer que si $\Gamma \vdash \phi \vee p$ et $\Gamma \vdash \neg p \vee \psi$ sont prouvables dans $\mathbf{NK_0}$, alors $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$ l'est aussi.

Exercice 2. Quelques tautologies

Donner une preuve en déduction naturelle classique des formules suivantes, où A, B et C sont des variables propositionnelles :

Question 4. Le tiers exclu $A \vee \neg A$

Question 5. La loi de Peirce $((A \to B) \to A) \to A$

Question 6. Une loi de De Morgan $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

Exercice 3. Des règles nécessaires à la complétude

Question 7. Montrer que si l'on retire la règle d'affaiblissement à $\mathbf{NK_0}$, le système de déduction reste complet.

Question 8. Montrer que si l'on retire les règles d'introduction de $\vee$ à $\mathbf{NK_0}$, le système de déduction n'est plus complet.

Exercice 4. Réduction locale des coupures

Un des principes dirigeant la forme des règles en déduction naturelle est la réduction locale : on veut pouvoir réduire les introductions immédiatement suivies d'une élimination. Par exemple, pour le connecteur $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Gamma \vdash \phi_1} \qquad \dfrac{\Pi_2}{\Gamma \vdash \phi_2}}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\wedge I}{\Gamma \vdash \phi_1}\wedge E \quad \leadsto_e \quad \dfrac{\Pi_1}{\Gamma \vdash \phi_1}$$

Question 9. Vérifier qu'on peut réduire de même les introductions suivies d'éliminations pour les connecteurs $\neg$, $\to$ et $\vee$.

Question 10. Trouver toutes les preuves de $A \to B \to A$ qui soient irréductibles pour $\leadsto_e$.

Question 11. Donner une preuve de cet énoncé qui ne soit pas en forme normale pour $\leadsto_e$.

Exercice 5. Autres versions classiques

Question 12. On remplace dans $\mathbf{NK_0}$ la règle *(Abs)* par

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot E) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (\text{Tiers-exclu})$$

Montrer que le système reste correct et complet.

Question 13. On remplace dans $\mathbf{NK_0}$ la règle *(Abs)* par

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot E) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\text{Restart})$$

L'on se restreint à utiliser (Restart) dans le cas où A est la conclusion d'un séquent rencontré précédemment dans la preuve (c'est-à-dire il y a un séquent $\Delta \vdash Q$ dans le chemin qui va de la conclusion de la dérivation à la conclusion de la règle (Restart)).

Montrer que le système reste correct et complet.

Exercice 6.

Donner des règles d'introduction et d'élimination, ainsi que les réductions locales, dans le style de $\mathbf{NK_0^-}$, pour les connecteurs définis suivants (on n'utilise aucun autre connecteur logique, mais l'on s'autorise la constante $\bot$) :

Question 14. $\leftrightarrow$ définit par $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Question 15. $\oplus$ définit par $A \oplus B \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$.

Exercice 7. D'autres tautologies

Donner une preuve en déduction naturelle classique des formules suivantes, où A, B et C sont des variables propositionnelles :

Question 16. La curryfication $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to B \to C)$

Question 17. La contraposée $(\neg B \to \neg A) \leftrightarrow (A \to B)$

Question 18. L'autre sens de la loi de De Morgan $(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$

Question 19. L'autre loi de De Morgan $(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$

Exercice 8.

On se restreint à l'utilisation des règles (Ax), (Aff), $(\to I)$, $(\to E)$ auxquelles on ajoute l'élimination de la double négation :

$$(\text{Raa})\ \frac{\Gamma \vdash A \to \bot \to \bot}{\Gamma \vdash A}$$

Question 20. On définit $\neg A \equiv A \to \bot$, montrer que l'on retrouve les règles d'introdution et d'élimination de la négation, ainsi que la règle (Abs).

Question 21. On définit $A \vee B \equiv (A \to \bot) \to (B \to \bot) \to \bot$, montrer que l'on retrouve les règles d'introdution et d'élimination de la disjonction.

Question 22. On définit $A \wedge B \equiv (A \to B \to \bot) \to \bot$, montrer que l'on retrouve les règles d'introdution et d'élimination de la conjonction.