TD10 - Complétude du calcul des séquents du premier ordre

Exercice 1. Mise en forme prénexe

Question 1. Montrer l'équivalence logique entre $(\exists x.\phi) \vee \psi$ et sa forme prénexe.

Exercice 2. Théorème de Löwenheim-Skolem ascendant

Soit $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ un langage fini ou dénombrable. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de formules de ce langage et κ un ensemble infini quelconque.

Question 2. Montrer que si $\mathcal{T}$ a un modèle infini, elle a un modèle de cardinal supérieur à celui de κ.

Exercice 3. Autour de la preuve de complétude

On s'intéresse au séquent $\vdash \Gamma$.

Définition 1 (Sous-formule). On définit $sf(\phi)$ par induction sur ϕ :

$sf(P(t_1,\ldots,t_n)) = \{P(t_1,\ldots,t_n)\}$ $\quad sf(\psi * \chi) = \{\psi * \chi\} \cup sf(\psi) \cup sf(\chi)$ si $*$ est $\wedge$, $\vee$ ou $\Rightarrow$

$sf(\neg\psi) = \{\neg\psi\} \cup sf(\psi)$ $\quad sf(Qx.\psi) = \{Qx.\psi\} \cup \{\, sf(\psi\,\{x \mapsto t\}) \,|\, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})\}$ si Q est $\exists$ ou $\forall$

Un choix de la forme $\langle\rho\rangle$ est une *sous-formule* de Γ, s'il existe $\phi \in \Gamma$ telle que $\rho \in sf(\phi)$.

Un choix de la forme $\langle\exists x.\rho, t\rangle$ est une *sous-formule* de Γ, s'il existe $\phi \in \Gamma$ telle que $\exists x.\rho \in sf(\phi)$.

Question 3. Montrer que dans la preuve de complétude du calcul des séquents, on peut restreindre la suite de choix s à ne contenir que des sous-formules de Γ.

Question 4. On s'intéresse au cas où $\mathcal{F} = \{\, a_i(0) \,|\, i \in \{1,\ldots n\}\}$ et Γ est clos, sous forme prénexe et sans quantificateur universel.

Montrer que l'on peut restreindre les couples $\langle\exists x.\psi, t\rangle$ apparaissant dans la suite de choix s au cas où $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$, c'est-à-dire au cas où t est l'un des a_i.

Exercice 4. Nécessaire contraction

On considère $\mathcal{F} = \{s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{P(1)\}$.

Question 5. Donner dans $\mathbf{LK}_1$ une preuve de $\vdash \exists x.(P(x) \Rightarrow P(s(x)))$.

Question 6. Montrer qu'il n'existe pas de preuve sans contraction de ce séquent.

Question 7. On se donne $\mathcal{F} = \{a(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{P(1)\}$.

Trouver une famille de formules $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout k, ϕ_k est valide et toute preuve de $\vdash \phi_k$ contient au moins k contractions.

Exercice 5. Modèle de l'égalité

On enrichit la syntaxe de la logique du premier ordre par un symbole $=$ que l'on interprète par $\mathfrak{M}, \sigma \models u = v$ ssi $(\llbracket u \rrbracket_{\sigma,\mathfrak{M}}, \llbracket v \rrbracket_{\sigma,\mathfrak{M}}) \in \{\, (x, x) |\, x \in M\}$.

On enrichit le calcul des séquents par les deux règles :

$$\frac{}{\vdash t = t} =_R \qquad \frac{\Gamma\,\{x \mapsto v\} \vdash \Delta\,\{x \mapsto v\}}{\Gamma\,\{x \mapsto u\}\,, u = v \vdash \Delta\,\{x \mapsto u\}} =_L$$

Question 8. Montrer que ces deux règles sont correctes.

Question 9. Montrer que l'on peut dériver tous les axiomes de l'égalité dans ce calcul.