TD9 - Démonstration automatique et résolution

Exercice 1. Résolution en calcul des séquents

Prouver en calcul des séquents les jugements suivants :

Question 1. $\vdash (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B') \Rightarrow (B \vee B')$

Question 2. $\vdash (A \vee A \vee B) \Rightarrow (A \vee B)$

Exercice 2. Théorème de Herbrand

Définition 1. Soit A une proposition prénexe close de la forme $\mathcal{Q}_1 x_1 . \ldots . \mathcal{Q}_n x_n . C$. On appelle *instance close* de A une proposition close de la forme σC où σ est une substitution de domaine $x_1, \ldots, x_n$.

Question 3. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des propositions existentielles closes et Γ, Δ des multiensembles de propositions closes sans quantificateurs. Montrer que si le langage contient au moins une constante, alors le séquent $\Gamma \vdash A_1, \ldots, A_n, \Delta$ est démontrable dans le calcul des séquents sans coupures si et seulement s'il existe des instances closes $A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}$ de A_1, …, $A_n^1, \ldots, A_n^{p_n}$ de A_n telles que le séquent sans quantificateurs $\Gamma \vdash A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}, \ldots, A_n^1, \ldots, A_n^{p_n}, \Delta$ soit démontrable dans le calcul des séquents sans coupures.

Question 4. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des propositions universelles closes. Montrer que si le langage contient au moins une constante, alors le séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash$ est démontrable dans le calcul des séquents sans coupures si et seulement s'il existe des instances closes $A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}$ de A_1, …, $A_n^1, \ldots, A_n^{p_n}$ de A_n telles que le séquent sans quantificateurs $A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}, \ldots, A_n^1, \ldots, A_n^{p_n} \vdash$ soit démontrable dans le calcul des séquents sans coupures.

Exercice 3. Le lemme-clé

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses, on note $\mathcal{C}^*$ l'ensemble des clauses démontrables par résolution à partir de $\mathcal{C}$.

Question 5. Soit D une clause close, $E = \{C_1, \ldots, C_n\}$ et $E' = \{C'_1, \ldots, C'_n\}$ où pour tout i, $C'_i = C_i$ ou $C'_i = (C_i \vee D)$. Montrer que pour tout $C \in E^*$, on a $C \in E'^*$ ou $(C \vee D) \in E'^*$.

Question 6. Soit $\mathcal{C}$ et D_1, D_2 deux clauses closes. Montrer que si $\bot \in (\mathcal{C} \cup \{D_1\})^*$ et $\bot \in (\mathcal{C} \cup \{D_2\})^*$ alors $\bot \in (\mathcal{C} \cup \{D_1 \vee D_2\})^*$.

Exercice 4. Mise sous forme clausale

Mettre sous forme clausale les formules suivantes :

Question 7. $(\exists x.\forall y.P(x,y)) \vee \neg(\exists x.\forall y.Q(x,y))$

Question 8. $\forall y_1.\exists x_1.\forall y_2.\exists x_2.(P(x_1,x_2) \wedge \neg P(y_1,y_2))$

Question 9. $(\forall x.\exists y.P(x,y)) \to (\exists x.\forall y.P(x,y))$

Exercice 5.

Question 10. Donner un modèle ou une preuve d'insatisfaisabilité par résolution pour la théorie suivante :

$$\left\{\begin{array}{cc} \forall x.p(x,f(f(x))), & \forall y.\ p(f(f(f(y))),y), \\ \forall x\forall y\forall z.\ p(x,y) \Rightarrow p(y,z) \Rightarrow p(x,z), & \forall x\forall y.\ \neg p(x,y) \vee \neg p(y,x) \end{array}\right\}$$

Exercice 6. Faire des preuves par résolution

On veut prouver $\exists x.\forall y.((U(x) \Rightarrow U(y)) \Rightarrow T(x)) \Rightarrow T(y)$

Question 11. Essayer de faire une preuve en calcul des séquents et constater que c'est difficile.

Question 12. Mettre sa négation sous forme clausale.

Question 13. Résoudre alors l'ensemble de clauses trouvé.

Question 14. Faire le même exercice sur la formule

$$\exists x.\exists y.\neg\,(P(x) \vee P(y) \vee Q(x,y)) \vee (P(x) \wedge P(y) \wedge \neg Q(x,y)) \vee Q(x,x)$$

Exercice 7. Je vous le dois

Question 15. Montrer que l'on peut restreindre les axiomes aux propositions atomiques.

Question 16. Montrer que l'on obtient un système équivalent au calcul des séquents sans coupures si on restreint la contraction aux propositions universelles à gauche et existentielles à droite.

Exercice 8. Encore moins de choix

Question 17. Montrer que la démonstration d'une proposition existentielle dans le calcul des séquents sans coupures n'utilise jamais les règles $\exists$-gauche et $\forall$-droite.

Question 18. Montrer que dans le calcul des séquents sans coupure privé des règles $\exists$-gauche et $\forall$-droite, le choix de la proposition est indifférent.