TD5 - Calcul des prédicats

Exercice 1. Retour sur la semaine dernière

Prouver en déduction naturelle les formules suivantes :

Question 1. $\neg\exists x.\neg\phi(x) \leftrightarrow \forall x.\phi(x)$

Question 2. $\exists x.\forall y.(P(x) \rightarrow P(y))$

Exercice 2. Arithmétique élémentaire

Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$. On considère l'ensemble A_{el} de formules constitué des axiomes de l'égalité et des 7 formules de l'arithmétique élémentaire.

$$\begin{gathered}
\forall x.0 + x = x \\
\forall x, y.s(x) + y = s(x + y) \\
\forall x.0 \times x = 0 \\
\forall x, y.s(x) \times y = (x \times y) + y \\
\forall x.\exists y.x = 0 \vee x = s(y) \\
\forall x.s(x) \neq 0 \\
\forall x, y.s(x) = s(y) \rightarrow x = y
\end{gathered}$$

Question 3. Donner un modèle $\mathcal{S}$ de A_{el} tel que $\mathcal{S} \nvDash \forall x.x + 0 = x$.

Exercice 3. $\mathcal{F}$-algèbres de petite taille

On suppose que $\mathcal{F} = \{s(1)\}$.

Question 4. Donner un exemple de deux $\mathcal{F}$-algèbres fines ayant même domaine telles qu'il n'existe aucun morphisme de l'une dans l'autre.

Question 5. Donner un exemple de deux $\mathcal{F}$-algèbres distinctes, de même domaine et isomorphes.

Question 6. Lorsque D a 1,2,3 éléments, combien y a-t-il de $\mathcal{F}$-algèbres de domaine D, à isomorphisme près.

Exercice 4. Substitutions et modèles de termes

Question 7. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de domaine $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ et ϕ une formule construite sur $\mathcal{F}$, de variables libres $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}, \mathcal{M} \models \phi$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \phi\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$.

Question 8. Donner un exemple de formule ϕ à une variable libre x telle que pour tout terme t sans variable, $\vdash \phi\{x \mapsto t\}$ mais $\nvdash \forall x.\phi$.

Exercice 5.

Question 9. Donner deux structures élémentairement équivalentes et non isomorphes.

Question 10. Même question en supposant que $\mathcal{P}$ contient un prédicat binaire interprété comme l'égalité.

Question 11. Montrer que si $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{=\}$ alors deux structures de domaine dénombrable qui sont élémentairement équivalentes et satisfont les axiomes de l'égalité sont isomorphes.

Question 12. On suppose $\mathcal{F} \subseteq \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} \subseteq \{=\}$. Donner deux structures élémentairement équivalentes, non isomorphes, dénombrables et dans lesquelles $=$ est interprété comme l'égalité.

Exercice 6.

Question 13. En supposant que $\mathcal{P}$ ne contient que des symboles unaires et $\mathcal{F} = \emptyset$, montrer que si une formule ϕ est satisfaisable, alors elle a un modèle fini.