TD4 - Calcul des prédicats

Exercice 1.

Question 1. Proposer un ensemble de symboles de fonctions avec arité $\mathcal{F}$ pour représenter les listes et écrire le terme dénotant la liste constitutée de deux listes vides.

Question 2. Proposer un langage (c'est-à-dire $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$) représentant les groupes ainsi que 3 formules dans ce langage dénotant les 3 axiomes des groupes.

Question 3. Proposer un langage représentant les relations d'équivalence ainsi que 3 formules dans ce langage dénotant les 3 axiomes des relation d'équivalence.

Exercice 2. Une arithmétique minimale

On considère les formules du premier ordre formées d'un symbole de fontion binaire $\mathcal{F} = \{+\}$ et d'un symbole de prédicat binaire $\mathcal{P} = \{=\}$. Soit $\mathcal{M}_\mathbb{N}$ et $\mathcal{M}_\mathbb{Z}$ la $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure formée respectivement de l'ensemble $\mathbb{N}$, de l'ensemble $\mathbb{Z}$, dans les deux cas munis de l'addition et de la fonction caratéristique de l'égalité.

Question 4. La formule $\forall x.\forall y.(x = y)$ est-elle satisfaite par ces structures ?

Question 5. Qu'en est-il de $\forall x.\forall y.\exists z.(x + z = y)$?

Question 6. La formule $\forall x.\forall y.(x + y = y + x)$ est-elle satisfaite par ces structures ? Est-elle valide dans toute $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure ?

Exercice 3. Nombre d'éléments

Question 7. On considère un langage $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ tel que $(=/2) \in \mathcal{P}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivez une formule Ψ_n tel que tout modèle $\mathcal{S}$ de Ψ_n qui interprète $=$ comme l'égalité mathématique a un domaine de cardinal exactement n.

Question 8. Donnez un exemple de langage et d'une formule Ψ_∞ qui est satisfiable mais qui n'admet pas de modèles dont le domaine est fini.

Exercice 4. Réconcilions Gilles Dowek et Hubert Comon

Question 9. Montrer que les règles $\bot_{elim}$ et *tiers exclu* sont dérivables dans le système de déduction naturelle ayant *l'affaiblissement* et *l'absurde*.

Question 10. Montrer que la règle *d'absurde* est dérivable dans le système de déduction naturelle ayant $\bot_{elim}$ et *tiers exclu*

Exercice 5. Quelques preuves

Démontrer en déduction naturelle classique les jugements suivants quand c'est possible. Si vous êtes bloqués, expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer la règle "la plus naturelle à utiliser" et donner un modèle falsifiant le séquent.

Question 11. $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall y.\exists x.P(x,y)$

Question 12. $\forall y.\exists x.P(x,y) \vdash \exists x.\forall y.P(x,y)$

Question 13. $\forall x.(P(x) \lor Q(x)) \vdash (\forall x.P(x)) \lor (\forall x.Q(x))$

Question 14. $(\forall x.P(x)) \lor (\forall x.Q(x)) \vdash \forall x.(P(x) \lor Q(x))$

Question 15. $\forall x.\neg P(x) \vdash \neg\exists x.P(x)$

Question 16. $\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\forall x.P(x) \rightarrow \forall x.Q(x))$

Question 17. $\exists x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\forall x.P(x) \rightarrow \exists x.Q(x))$

Question 18. $P(0), \forall x.P(x) \rightarrow P(S(x)) \vdash P(S(S(S(0))))$

Question 19. $P(0), \forall x.P(x) \rightarrow P(S(x)) \vdash \forall x.P(x)$

Exercice 6. Des énoncés en français

Formaliser en logique des prédicats du premier ordre les énoncés suivants et les démontrer en déduction naturelle classique.

Question 20. Une involution est une bijection.

Question 21. Une relation symétrique transitive et totale est réflexive.

Question 22. Un groupe, ne compte qu'un seul élément neutre.

Question 23. Dans tout bar (non vide) il existe un client, appelé le buveur, tel que si le buveur boit tout le monde boit.

Question 24. Tout élément d'un groupe est régulier à droite.

Question 25. Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles ne se contenant pas eux-mêmes.