TD2 - Calcul des séquents et déduction naturelle

Exercice 1. Quelques tautologies

Donner une preuve en déduction naturelle et en calcul des séquents classique des formules suivantes, où A, B et C sont des variables propositionnelles :

Question 1. Le tiers exclu $A \vee \neg A$

Question 2. La loi de Peirce $((A \to B) \to A) \to A$

Question 3. La curryfication $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to B \to C)$

Question 4. Une loi de De Morgan $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Question 5. La contraposée $(\neg B \to \neg A) \leftrightarrow (A \to B)$

Exercice 2. Théorème de la déduction - le retour

Question 6. Montrer que $\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi$ est prouvable en $\mathbf{LK_0^-}$ si et seulement si $\Gamma \vdash \Delta, \phi \to \psi$ est prouvable en $\mathbf{LK_0^-}$.

Exercice 3. Des règles nécessaires à la complétude

Question 7. Montrer que si l'on retire la règle d'affaiblissement à $\mathbf{NK_0}$, le système de déduction reste complet.

Question 8. Montrer que si l'on retire les règles d'introduction de $\vee$ à $\mathbf{NK_0}$, le système de déduction n'est plus complet.

Exercice 4. Coupure en déduction naturelle

Question 9. Montrer que si $\Gamma, \phi \vdash \psi$ et $\Gamma \vdash \phi$ sont prouvables dans $\mathbf{NK_0}$, alors $\Gamma \vdash \psi$ l'est aussi.

Question 10. Montrer que $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\phi$ et $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\psi$ sont prouvables dans $\mathbf{NK_0}$

Exercice 5. Traduisons les preuves

On cherche une méthode effective de traduction entre calcul des séquents et la déduction naturelle. On s'interdit donc dans cet exercice d'utiliser les théorèmes de complétude. On nomme $\mathbf{LK_0}$ le calcul des séquents avec la règle de coupure.

Question 11. Montrer que si le jugement $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable en $\mathbf{NK_0}$, alors le séquent $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable en $\mathbf{LK_0}$

Question 12. Montrer que $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ est prouvable en $\mathbf{LK_0}$ si et seulement si $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash \bot$ est prouvable en $\mathbf{LK_0}$

Question 13. Montrer que si $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ est prouvable en $\mathbf{LK_0}$ alors $\Gamma, \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n \vdash \bot$ est prouvable en $\mathbf{NK_0}$

Question 14. Montrer que si $\Gamma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ est prouvable en $\mathbf{LK_0}$ alors $\Gamma \vdash \phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$ est prouvable en $\mathbf{NK_0}$

Exercice 6. Prouver c'est long...

Question 15. Expliquer pourquoi l'algorithme de décision de la validité résultant du théorème de complétude du calcul des séquents est exponentiel en la taille du séquent.