TD12 - Synthèse

Exercice 1. Prouvable : classiquement ou intuitionnistiquement ?

Pour chacun des séquents suivants, dire s'il est prouvable classiquement et/ou intuitionnistiquement :

Question 1. $B \vdash A \Rightarrow B$

Question 2. $(A \vee B) \Rightarrow B \vdash B \Rightarrow A$

Question 3. $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash (A \vee B)$

Exercice 2. Vrai ou faux

Parmi les énoncés suivants, certains sont vrais, d'autres faux et pour certains on ne sait pas conclure. Justifier pour chacun d'entre-eux à quelle catégorie il appartient :

Question 4. Toute théorie du premier ordre est incohérente ou incomplète.

Question 5. Toute théorie complète est décidable.

Question 6. Toute théorie incohérente est décidable.

Question 7. L'arithmétique élémentaire n'a pas de modèle fini.

Question 8. Toute théorie engendrée par un sous-ensemble d'une théorie complète est elle-même récursive.

Question 9. L'intersection de deux théories décidables est décidable.

Question 10. La cohérence de l'arithmétique de Peano peut s'exprimer comme une formule de l'arithmétique de Peano, mais on ne peut pas prouver cet énoncé dans l'arithmétique de Peano.

Exercice 3.

Soit $\mathcal{F} = \{a(0), b(0), f(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{P(2), Q(2)\}$.

Question 11. L'ensemble de 3 clauses suivant est-il satisfaisable ? Justifier.

$\forall x.\, Q(x,a) \qquad \forall x.y.z.\, \neg P(y,y) \vee \neg P(f(a,x),z) \qquad \forall x.y.z.\, P(z,y) \vee P(y, f(x,b)) \vee \neg Q(z,a)$

Exercice 4. Théorème de Löwenheim-Skolem ascendant

Soit $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ un langage fini ou dénombrable, $\mathcal{T}$ une théorie dans ce langage et κ un ensemble infini quelconque.

Question 12. Montrer que si la théorie $\mathcal{T}$ a un modèle infini, elle a un modèle de cardinal supérieur à celui de κ.

Exercice 5. Théorème de Löwenheim-Skolem descendant

Définition 1 (Sous-structure élémentaire). $\mathfrak{M}$ est une *sous-structure élémentaire* de $\mathfrak{N}$ si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$ telle que pour tout formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,

$$\mathfrak{M} \vDash \phi(\bar{m}) \text{ si et seulement si } \mathfrak{N} \vDash \phi(\bar{m})$$

On note alors $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$.

Question 13. Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Montrer que $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ si et seulement si pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, si $\mathfrak{N} \vDash \exists x. \phi(x, \bar{m})$ alors il existe un $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{N} \vDash \phi(m_0, \bar{m})$.

Question 14. Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure infinie et A un sous-ensemble de N. Soit κ un cardinal infini tel que $\max(|A|, |\mathcal{F}|, |\mathcal{P}|) \leqslant \kappa \leqslant |\mathfrak{N}|$. Alors il y a une sous-structure élémentaire $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ contenant A et de cardinal κ.