TD10 - Logique intuitioniste

Exercice 1. Tout reste vrai dans un monde plus grand

Soit $\mathcal{K}$ une structure de Kripke, $\alpha \in \mathcal{K}$ et ϕ une formule.

Question 1. Que signifie $\alpha \Vdash \neg\neg\phi$?

Question 2. Montrer que si $\alpha \Vdash \phi$, alors pour tout $\beta \geqslant \alpha$, $\beta \Vdash \phi$.

Exercice 2. Correction de la déduction naturelle

Question 3. Montrer que toutes les règles de NJ_0 sont correctes, c'est-à-dire que si $\mathcal{K}$ satisfait les prémisses d'une règle, alors elle satisfait la conclusion.

Exercice 3. Classiquement vrai...

Montrer que les jugements suivants ne sont pas prouvables dans NJ_0

Question 4. $\vdash P \vee \neg P$

Question 5. $\neg\neg P \vdash P$

Question 6. $\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

Question 7. $A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

Question 8. $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \vee B$

Exercice 4. Traduction par double négation

Question 9. Montrer que pour toute formule ϕ, $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$ est valide en logique intuitioniste.

On définit l'application $\tilde{}$ par :

- $\tilde{\top} = \top$,
- $\tilde{\bot} = \bot$,
- $\tilde{P} = \neg\neg P$ si P est une variable propositionnelle,
- $\widetilde{\phi \wedge \psi} = \tilde{\phi} \wedge \tilde{\psi}$,
- $\widetilde{\phi \vee \psi} = \neg(\neg\tilde{\phi} \wedge \neg\tilde{\psi})$,
- $\widetilde{\phi \Rightarrow \psi} = \tilde{\phi} \Rightarrow \tilde{\psi}$,

- $\widetilde{\neg\phi} = \neg\tilde{\phi}$.

On étend cette définition aux multi-ensembles par $\tilde{\Gamma} = \left\{ \tilde{\phi} \middle| \phi \in \Gamma \right\}$.

Question 10. Montrer que pour tout ϕ, $\vdash_{\mathrm{NJ}_0} \neg\neg\tilde{\phi} \Rightarrow \tilde{\phi}$

Question 11. Montrer que pour tout ϕ, $\vdash_{\mathrm{NK}_0} \tilde{\phi} \Leftrightarrow \phi$

Question 12. Montrer que $\tilde{\Gamma} \vdash \tilde{\phi}$ est prouvable dans NJ_0 si et seulement si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans NK_0.

Exercice 5. ... mais pas intuitionistiquement

Montrer que l'on ne peut pas prouver dans NJ_1 les jugements suivants :

Question 13. $(P \Rightarrow \exists x. Q(x)) \vdash \exists x. (P \Rightarrow Q(x))$

Question 14. $\forall x. \neg\neg Q(x) \vdash \neg\neg\forall x. Q(x)$

Exercice 6. Substitutions

Soit $\Gamma \vdash \phi$ un séquent prouvable dans LJ_O et ψ une formule de $\mathcal{F}_O(\mathcal{P})$.

Question 15. Montrer que $\Gamma [A := \psi] \vdash \phi [A := \psi]$ est prouvable dans LJ_0.