DM2 - Élimination des coupures

Commençons par exprimer les hypothèses de récurrence :

HR1(k) Pour tout n et m entiers naturels, pour tout Γ, Γ', Δ et Δ' multi-ensembles de formules, pour tout A formule telle que $|A| \leqslant k$, si $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et $\Gamma' \vdash \Delta', A^m$ ont une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure, alors $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

HR2($k+1$,l) Pour tout n et m entiers naturels, pour tout Γ, Γ', Δ et Δ' multi-ensembles de formules, pour tout A formule telle que $|A| = k$, pour toute preuve π de $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et π' de $\Gamma' \vdash \Delta', A^m$ dans le calcul des séquents sans coupure, si $|\pi| + |\pi'| \leqslant l$, alors $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

Soit A une formule, m et n des entiers naturels, Γ, Γ', Δ et Δ' des multi-ensembles de formules, π et π' des preuves sans coupure respectivement de $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et $\Gamma' \vdash \Delta', A^m$.

On suppose que pour tout $k < |A|$, on a HR1(k) et pour tout $l < |\pi| + |\pi'|$ on a HR2($|A|$,l).

Question 1 π prouve $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et ρ'_1 prouve $\Gamma' \vdash B, A^{m-1}, \Delta'$, donc par HR2, comme $|\rho'_1| < |\pi'|$, il existe une preuve sans coupure η_1 de $\Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'$.

De même, en utilisant π et ρ'_2, HR2 nous assure qu'il existe une preuve sans coupure η_2 de $\Gamma, \Gamma' \vdash C, \Delta, \Delta'$, car $|\rho'_2| < |\pi'|$. Et, en utilisant ρ et π', HR2 nous assure de l'existence d'une preuve sans coupure η_3 de $\Gamma, \Gamma', B, C \vdash \Delta, \Delta'$, car $|\rho| < |\pi|$.

On a $A = B \wedge C$, donc $|B| < |A|$, or η_1 prouve $\Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'$ et η_3 prouve $\Gamma, \Gamma', B, C \vdash \Delta, \Delta'$. Par conséquent, HR1 nous assure qu'il existe une preuve sans coupure η_4 de $\Gamma, \Gamma', C \vdash \Delta, \Delta'$.

De même, $A = B \wedge C$, donc $|C| < |A|$, or η_2 prouve $\Gamma, \Gamma' \vdash C, \Delta, \Delta'$ et η_4 prouve $\Gamma, \Gamma', C \vdash \Delta, \Delta'$. Par conséquent, HR1 nous assure qu'il existe une preuve sans coupure de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

Questions 2 à 4 Ces questions se traitent de façon identique à la question 1.

Question 5 Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme. Pour tout multi-ensembles Γ et Δ, pour tout terme t et toute variable x, s'il existe une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$, alors il existe une preuve de $({}^t/_x)\Gamma \vdash ({}^t/_x)\Delta$ de même taille.

Démonstration. Ce lemme se prouve par récurrence sur la taille de la preuve. Traitons 5 cas représentatifs de la situation :

- Si la dernière règle appliqué est un axiome, alors il a une formule A commune à Γ et Δ. $({}^t/_x)A$ est commune à $({}^t/_x)\Gamma$ et $({}^t/_x)\Delta$, donc on peut prouver $({}^t/_x)\Gamma \vdash ({}^t/_x)\Delta$ par l'axiome.

- Si la dernière règle est le $\wedge$-gauche, on a $\Gamma = \Gamma', A \wedge B$:

$$\dfrac{\overline{\Gamma', A, B \vdash \Delta}}{\Gamma', A \wedge B \vdash \Delta}$$

  Alors, par hypothèse de récurrence, on a une preuve de $({}^t/_x)\Gamma', ({}^t/_x)A, ({}^t/_x)B \vdash ({}^t/_x)\Delta$ de même taille que celle de $\Gamma', A, B \vdash \Delta$, et en utilisant la règle $\wedge$-gauche, on obtient une preuve de $({}^t/_x)\Gamma \vdash ({}^t/_x)\Delta$ de même taille que la preuve originale.

- Si la dernière règle est la $\Rightarrow$-droite, on a $\Delta = \Delta', A \Rightarrow B$:

$$\dfrac{\overline{\Gamma, A \vdash B, \Delta'}}{\Gamma, A \vdash A \Rightarrow B, \Delta'}$$

  Alors, par hypothèse de récurrence, on a une preuve de $({}^t/_x)\Gamma, ({}^t/_x)A \vdash ({}^t/_x)B, ({}^t/_x)\Delta'$ de même taille que celle de $\Gamma, A \vdash B, \Delta'$, et en utilisant la règle $\Rightarrow$-droite, on obtient une preuve de $({}^t/_x)\Gamma \vdash ({}^t/_x)\Delta$ de même taille que la preuve originale.

- Si la dernière règle est le $\forall$-droite, on a $\Delta = \Delta', \forall y.\, A$:

$$\dfrac{\overline{\Gamma \vdash A, \Delta'}}{\Gamma \vdash \forall y.\, A, \Delta'}\ y \text{ n'est pas libre dans } \Gamma,\ \Delta'$$

  Soit z une variable qui n'est pas libre dans t, dans Γ ni dans Δ. Par hypothèse d'induction, on a une preuve de $({}^t/_x)({}^z/_y)\Gamma \vdash ({}^t/_x)({}^z/_y)A, ({}^t/_x)({}^z/_y)\Delta'$ de même taille que celle de $\Gamma \vdash A, \Delta'$. Comme y n'apparaît pas libre dans Γ et Δ', ce séquent est identique à : $({}^t/_x)\Gamma \vdash ({}^t/_x)({}^z/_y)A, ({}^t/_x)\Delta'$. z ayant été choisie non-libre dans t, Γ et Δ, on a :

$$\dfrac{\overline{({}^t/_x)\Gamma \vdash ({}^t/_x)({}^z/_y)A, ({}^t/_x)\Delta'}}{({}^t/_x)\Gamma \vdash \forall z.\, ({}^t/_x)({}^z/_y)A, ({}^t/_x)\Delta'}\ z \text{ n'est pas libre dans } ({}^t/_x)\Gamma,\ ({}^t/_x)\Delta'$$

Comme z n'est pas libre dans t, les formules $\forall z.\,({}^{t}/_{x})({}^{z}/_{y})A$ et $({}^{t}/_{x})\forall z.\,({}^{z}/_{y})A$ sont identiques, et cette dernière formule est un α-renommage de $({}^{t}/_{x})\forall z.\,A$. On a donc obtenu une preuve de $({}^{t}/_{x})\Gamma \vdash ({}^{t}/_{x})\Delta$ de même taille que la preuve originale.

- Si la dernière règle est un $\exists$-droite, on a $\Delta = \Delta', \exists y.\,A$:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash ({}^{t'}/_{y})A, \Delta'}}{\Gamma, A \vdash \exists y.A, \Delta'}$$

  Alors, par hypothèse de récurrence, on a une preuve de $({}^{t}/_{x})\Gamma \vdash ({}^{t}/_{x})({}^{t'}/_{y})A, ({}^{t}/_{x})\Delta'$ de même taille que celle de $\Gamma \vdash ({}^{t'}/_{y})A, \Delta'$. Il se peut que x apparaisse dans t', mais cela ne pose pas de problème pour utiliser la règle $\exists$-droit. On obtient alors une preuve de $({}^{t}/_{x})\Gamma \vdash ({}^{t}/_{x})\Delta$ de même taille que la preuve originale. $\square$

Revenons à la question :

Par le lemme, il existe un preuve ρ'' de $\Gamma' \vdash ({}^{t}/_{x})B, A^{m-1}, \Delta'$ de même taille que ρ', car l'application de la règle $\forall$-droite nous assure que x n'est pas libre dans Γ' et Δ', de sorte que $\Gamma' = ({}^{t}/_{x})\Gamma'$ et $\Delta' = ({}^{t}/_{x})\Delta'$.

π prouve $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et ρ'' prouve $\Gamma' \vdash ({}^{t}/_{x})B, A^{m-1}, \Delta'$, donc par HR2, comme $|\rho''| = |\rho'| < |\pi'|$, il existe une preuve sans coupure η_1 de $\Gamma, \Gamma' \vdash ({}^{t}/_{x})B, \Delta, \Delta'$.

De même, en utilisant π' et ρ, HR2 nous assure qu'il existe une preuve sans coupure η_2 de $\Gamma, \Gamma', ({}^{t}/_{x})B \vdash \Delta, \Delta'$, car $|\rho| < |\pi|$.

On a, $A = \forall x.B$, donc $|({}^{t}/_{x})B)| = |B| < |A|$, or η_1 prouve $\Gamma, \Gamma' \vdash ({}^{t}/_{x})B, \Delta, \Delta'$ et η_2 prouve $\Gamma, \Gamma', ({}^{t}/_{x})B \vdash \Delta, \Delta'$. Par conséquent, HR1 nous assure qu'<u>il existe une preuve sans coupure de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$</u>.

Question 6 Cette question se traite de façon identique à la question 5.

Question 7 La preuve π' est de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho'}{\Gamma' \vdash A^{m+1}, \Delta'}}{\Gamma' \vdash A^{m}, \Delta'}$$

π prouve $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et ρ' prouve $\Gamma' \vdash A^{m+1}, \Delta'$, donc par HR2, comme $|\rho'| < |\pi'|$, <u>il existe une preuve sans coupure de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$</u>.

Question 8 Cette question se traite de façon identique à la question 7.

Question 9 Montrons par induction sur la preuve de $\Gamma \vdash \Delta$, que $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma, A \vdash \Delta$ ont des preuves sans coupure de même taille. Traitons 3 cas représentatifs :

- Si la dernière règle appliquée est un axiome, il y a une formule commune à Γ et Δ. On peut donc utiliser l'axiome pour prouver $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$.

- Si la dernière règle appliquée est $\wedge$-droite, on a $\Delta = B \wedge c, \Delta'$:

$$\dfrac{\dfrac{\eta_1}{\Gamma \vdash B, \Delta'} \qquad \dfrac{\eta_2}{\Gamma \vdash C, \Delta'}}{\Gamma \vdash B \wedge C, \Delta'}$$

  Par hypothèse d'induction, on a des démonstrations de $\Gamma \vdash A, B, \Delta'$ et $\Gamma \vdash A, C, \Delta'$ de mêmes tailles que η_1 et η_2 respectivement, donc on a une démonstration de $\Gamma \vdash A, \Delta$ de même taille que celle de $\Gamma \vdash \Delta$. De même pour $\Gamma, A \vdash \Delta$.

- Si la dernière règle appliquée est le $\exists$-gauche, $\Gamma = \exists x.\, B, \Gamma'$:

$$\dfrac{\dfrac{\eta}{\Gamma', B \vdash \Delta}}{\Gamma', \exists x.\, B \vdash \Delta}\ x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma',\ \Delta$$

  Soit y une variable non libre dans A, Γ et Δ. D'après le lemme de la question 5, on a une preuve de $({}^{y}/_{x})\Gamma', ({}^{y}/_{x})B \vdash ({}^{y}/_{x})\Delta$ de la même taille que celle de $\Gamma', B \vdash \Delta$. En outre, x n'apparaît pas libre dans Γ et Δ, donc cette preuve prouve $\Gamma', ({}^{y}/_{x})B \vdash \Delta$.

  En appliquant l'hypothèse d'induction, on a des preuves de $\Gamma, ({}^{y}/_{x})B \vdash A, \Delta$ et $\Gamma, ({}^{y}/_{x})B, A \vdash \Delta$ et comme y a été choisi non-libre dans Γ, A et Δ, on peut applique la règle $\exists$-gauche. On a alors la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma', ({}^{y}/_{x})B \vdash A, \Delta}}{\Gamma', \exists y.\, ({}^{y}/_{x})B \vdash A, \Delta}\ y \text{ n'est pas libre dans } \Gamma',\ A,\ \Delta$$

  Comme $\exists y.\, ({}^{y}/_{x})B$ est un α-renommage de $\exists x.\, B$, on a bien une preuve de $\Gamma', \exists x.\, B \vdash A, \Delta$ de même taille que la preuve originale. De même pour $\Gamma', \exists x.\, B, A \vdash \Delta$

D'après le principe d'induction, on en conclut que pour tout Γ, Δ et tout A, si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable sans coupure, alors $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$ sont prouvables sans coupure et ont des preuves de même taille que la preuve originale.

Question 10 Commençons par noté qu'a priori, si l'axiome n'est pas appliqué sur A, il n'y a aucune raison que A figure dans Δ. Dans ce cas, Γ et Δ ont une formule en commun et il y a donc de façon évidente par la règle axiome des preuves de $\Gamma, \Gamma' \vdash A^m, \Delta, \Delta'$ et de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

Si l'axiome porte sur A, alors par définition, A figure dans Δ. π' prouve $\Gamma' \vdash A^m, \Delta$, par des affaiblissements, on obtient que le jugement $\Gamma, \Gamma' \vdash A^m \Delta, \Delta'$ est prouvable et en effectivement m contractions, sur A, on obtient une preuve de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$

Question 11 Cette question se traite de façon identique à la question 10.

Question 12 Les 11 questions précédentes ont servi à vérifier chacune des règles possibles dans le cas où les dernières règles de π et π' concernent la proposition A. On a donc bien dans ce cas, que le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupure.

Question 13 ρ prouve $\Gamma, A^n, B, C \vdash \Delta$ et π' prouve $\Gamma' \vdash A^m, \Delta'$, donc par HR2, comme $|\rho| < |\pi|$, il existe une preuve sans coupure η de $\Gamma, \Gamma', B, C \vdash \Delta, \Delta'$.

En utilisant la règle $\wedge$-gauche, on obtient une preuve sans coupure de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

Question 14 Il faut traiter l'éventualité où chacune des 17 règles du calcul des séquents est la dernière de π ou de π', ce qui fait 34 cas à considérer (en comptant l'axiome traité question 10 et 11 et le cas traité question 13).

Question 15 Comme nous venons de traiter tous les cas, nous pouvons conclure l'induction et dire que comme l'ordre choisi était bien fondé, pour tout Γ, Γ', Δ, Δ' multi-ensembles, pour tout m et n entiers, pour toute formule A, si $\Gamma, A^n \vdash \Delta$ et $\Gamma' \vdash A^m, \Delta'$ ont des preuves sans coupure, c'est aussi le cas de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

Question 16 C'est le résultat de la question 15 dans le cas particulier où $m = n = 1$.

Question 17 D'après la question 16, si $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$ sont prouvables sans coupure, c'est aussi le cas de $\Gamma, \Gamma \vdash \Delta, \Delta$. En effectuant une contraction gauche par formule de Γ et une contraction droite par formule de Δ, on obtient une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash \Delta$.

Question 18 On procède par récurrence sur la taille de la preuve.

- si la dernière règle utilisée n'est pas la règle de coupure, par hypothèse de récurrence, les prémisses de la règle sont démontrables sans coupure et comme la règle existe dans le calcul des séquents sans coupure, il suffit de la réappliquer.
- sinon, la dernière règle est une règle de coupure :

$$\dfrac{\dfrac{\eta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \dfrac{\eta'}{\Gamma \vdash A, \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Par hypothèse de récurrence, $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$ ont des preuves sans coupure. Par la question 17, il existe donc une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash \Delta$.

Question 19 Supposons qu'il existe une preuve π sans coupure de $P(c) \vee Q(c) \vdash P(c)$. Montrons alors qu'à chaque étage de la preuve, un des séquents à prouver à la forme $(P(c) \vee Q(c))^i, Q(c)^j \vdash P(c)^k$ avec $i + j \geqslant 1$.

C'est le cas pour le séquent $P(c) \vee Q(c) \vdash P(c)$, qui est de la forme annoncée, avec $i = 1$, $j = 0$ et $k = 1$.

Si l'on a a un certain étage une séquent de la forme $(P(c) \vee Q(c))^i, Q(c)^j \vdash P(c)^k$, les seules règles dont ce séquent est la conclusion sont la contraction et le $\vee$-gauche.

- Si l'on applique une contraction, le séquent au dessus de celui étudié est de la forme $(P(c) \vee Q(c))^{i'}, Q(c)^{j'} \vdash P(c)^{k'}$ avec $i' \geqslant i$, $j' \geqslant j$ et $k' \geqslant k$, qui est bien de la forme anoncée.

- Si l'on applique le $\vee$-gauche, l'une des prémisses est $(P(c) \vee Q(c))^{i-1}, Q(c)^{j+1} \vdash P(c)^k$, qui est bien de la forme annoncée.

Ceci prouve que quelle que soit la hauteur considéré dans la preuve, l'un des séquents situé à cette hauteur ne peut pas être la conclusion d'un axiome. Comme toute preuve a une hauteur finie, il n'existe pas de preuve π de $P(c) \vee Q(c) \vdash P(c)$ dans le calcul des séquents sans coupure.

Question 20 D'après la question 18, s'il existait une preuve de ce séquent, il en existerait une sans coupure. Or, on a vu question 19 qu'il n'y avait pas de preuve sans coupure de $P(c) \vee Q(c) \vdash P(c)$, donc il n'y a pas de preuve de $P(c) \vee Q(c) \vdash P(c)$ dans le calcul des séquents.