Montrons que cette définition a un sens, c'est a dire que les conjonctions/disjonctions sont finies. Pour cela, on montre, par récurrence sur m, que, pour tout n, l'ensemble $E_{n.m} = \{\phi_m^{b_1,\ldots,b_n} \mid b_1, \ldots, b_n \in D_2\}$ est, à équivalence logique près, de cardinal $K_{n,m}$ fini.

Si $m = 0$, $\Phi(b_1, \ldots, b_n)$ est déterminé par un sous-ensemble de l'ensemble des formules plates à n variables libres : il existe une injection de l'ensemble $E_{n,0}$ dans l'ensemble des ensembles de formules plates à n variables libres. Si $fa(n)$ est le nombre de formules plates atomiques à n variables libres, $K_{n,0} \leq 2^{fa(n)}$.

On construit ensuite l'injection suivante de $E_{n,m+1}$ dans $2^{E_{n+1,m}}$: à chaque formule $\phi_{m+1}^{b_1,\ldots,b_n}$ on associe l'ensemble des formules $\{\phi_m^{b_1,\ldots,b_n,b} \mid b \in D_2\}$. Il s'agit bien d'une injection, par définition de $\phi_{m+1}^{b_1,\ldots,b_n}$. Donc $K_{n,m+1} \leq 2^{K_{n+1,m}}$.

Noter aussi que les formules $\phi_m^{\vec{b}}$ sont de rang m.

Exemple 11.3.2 Supposons que $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{>, =\}$. Si $b_2 >_{\mathcal{S}_2} b_1$, $\phi_0^{b_1,b_2}$ est la formule $x_1 = x_1 \wedge x_2 > x_1 \wedge x_2 = x_2$. $\phi_1^{b_1,b_2}$ est la formule

$$\forall x_3.[(x_3 < x_1 \wedge x_3 < x_2 \wedge \cdots) \vee (x_3 = x_1 \wedge x_3 < x_2 \wedge \cdots) \vee (x_1 < x_3 \wedge x_3 < x_2 \wedge \cdots) \vee (x_1 < x_3 \wedge x$$
$$\wedge \quad \exists x_3 \ldots.$$

Supposons que $b_1, \ldots, b_n \in D_2$. On montre par récurrence sur m que

$$(1) \qquad \mathcal{S}_2, \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\} \models \phi_m^{b_1,\ldots,b_n}$$

Si $m = 0$, c'est une conséquence de la définition de $\Phi(b_1, \ldots, b_n)$. Si $m > 0$, par hypothèse de récurrence, $\mathcal{S}_2, \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_{n+1} \mapsto b_{n+1}\} \models \phi_{m-1}^{b_1,\ldots,b_{n+1}}$ donc

$$\text{Pour tout } b \in D_2, \quad \mathcal{S}_2, \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\} \uplus \{x_{n+1} \mapsto b\} \models \bigvee_{b_{n+1} \in D_2} \phi_{m-1}^{b_1,\ldots,b_{n+1}}(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

puisque l'un des b_{n+1} est b lui-même. Autrement dit

$$\mathcal{S}_2, \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\} \models \forall x_{n+1}. \bigvee_{b_{n+1} \in D_2} \phi_{m-1}^{b_1,\ldots,b_{m+1}}(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

et

$$\text{pour tout } b_{n+1} \in D_2, \text{ il existe } b \in D_2, \quad \mathcal{S}_2, \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\} \uplus \{x_{n+1} \mapsto b\} \models \phi_{m-1}^{b_1,\ldots,b_{n+1}}(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

Autrement dit

$$\mathcal{S}_2, \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\} \models \bigwedge_{b_{n+1} \in D_2} \exists x_{n+1}. \phi_{m-1}^{b_1,\ldots,b_{n+1}}(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

La stratégie du duplicateur consiste alors, à choisir a_n (resp. b_n) de manière à ce que $\phi_{N-n}^{b_1,\ldots,b_n}$ soit satisfaite dans $\mathcal{S}_1$. Montrons, par récurrence sur n qu'un tel choix est toujours possible. Si $n = 0$, alors ϕ_N est bien satisfaite dans les deux structures, puisque c'est une formule de rang N et que, d'après (1) elle est satisfaite dans $\mathcal{S}_2$. Si maintenant $\mathcal{S}_1\{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\} \models \phi_{N-n}^{b_1,\ldots,b_n}$.

– Supposons que le spoiler choisisse $b_{n+1} \in D_2$. Comme, par construction,
$$\mathcal{S}_1, \{x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n\} \models \exists x_{n+1} \phi_{N-n-1}^{b_1,\dots,b_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1})$$
On peut choisir $a_{n+1} \in D_1$ comme souhaité.
– Supposons que le spoiler choisisse $a_{n+1} \in D_1$, par construction
$$\mathcal{S}_1\{x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n\} \models \forall x_{n+1}. \bigvee_{b \in D_2} \phi_{N-n-1}^{b_1,\dots,b_n,b}(x_1, \dots, x_{n+1})$$
En particulier pour $x_{n+1} \mapsto a_{n+1}$, on peut choisir $b_{n+1} \in D_2$ de sorte que
$$\mathcal{S}_1\{x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, x_{n+1} \mapsto a_{n+1}\} \models \phi_{N-n-1}^{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1})$$

La stratégie est gagnante puisque, après N rondes, les séquences $a_1, b_1, ..., a_N, b_N$ définissent un isomorphisme partiel d'après (2).

Corollaire 11.3.1 *$\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$ ssi D a une stratégie gagnante.*

11.4 Un exemple de non définissabilité

On considère $\mathcal{P} = \{R(2), = (2)\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$. Les modèles sont donc des graphes orientés.

Théorème 11.4.1 *Il n'existe pas de formule du premier ordre ϕ qui soit satisfaite par les graphes finis connexes et pas par les graphes finis non connexes.*

Preuve:
On montre que, pour tout n il existe deux structures finies $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ telles que $\mathcal{S}_1$ est un graphe connexe, $\mathcal{S}_2$ n'est pas un graphe connexe et $\mathcal{S}_1 \equiv_n \mathcal{S}_2$. On choisit pour $\mathcal{S}_1$ un graphe à 2^n sommets $s_1, \dots, s_{2^n}$ et $R_1 = \{(s_i, s_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq 2^n - 1\} \cup \{(s_{2^n}, s_1)\}$. $\mathcal{S}_2$ est un graphe à 2^{n+1} sommets contenant deux copies disjointes du graphe G_1 dont on nommera les sommets s_i^1 et s_i^2 resp.

On note $d_1(s, s')$ la distance de deux sommets dans le graphe G_1 et $d_2(s, s')$ la distance de deux sommets dans le graphe G_2. d_2 peut être infinie dans le cas où les deux sommets sont dans des composantes distinctes (ce sont bien des distances).

La stratégie du duplicateur est telle que, après k tours, si les séquences $a_1, b_1, ...a_k, b_k$ de sommets ont été sélectionnés, alors, pour tous i, j, ou bien $d_1(a_i, a_j) < 2^{n-k}$ et dans ce cas $d_1(a_i, a_j) = d_2(b_i, b_j)$ ou bien $d_1(a_i, a_j) \geq 2^{n-k}$ et $d_2(a_i, a_j) \geq 2^{n-k}$. La preuve que le duplicateur a une stratégie qui permet de faire ce choix est laissée en exercice.

Après n tours, il existe une arête de a_i à a_j ssi il existe une arête de b_i à b_j : $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ définit un isomorphisme partiel entre les structures. D a donc une stratégie gagnante pour un jeu en n rondes. Ainsi, d'après le théorème 11.3.1, $\mathcal{S}_1 \equiv_n \mathcal{S}_2$.

Par l'absurde, s'il existait une formule ϕ qui est satisfaite par les graphes finis connexes et pas par les graphes finis non connexes, alors si $\mathcal{S}_1$ est un graphe connexe et $\mathcal{S}_2$ est un graphe non connexe, $\mathcal{S}_1 \not\equiv_{|\phi|} \mathcal{S}_2$. Or nous avons montré que ce n'est pas le cas.

Exercice 220
Compléter la preuve du théorème précédant en montrant que le duplicateur a bien un stratégie appropriée.

Exercice 221
On suppose que $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{\geq, =\}$. Montrer que les deux structures $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ munis de leur interprétation habituelle de $\geq$ sont élémentairement équivalentes.

Généraliser à deux modèles quelconques de la théorie des ordres denses. Que peut on en conclure ?

Exercice 222 (5)
Soit $\mathcal{F} = \{S(1), 0(0)\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$ et $\mathcal{T}$ est la théorie engendrée par les axiomes de l'égalité et :

$$\begin{array}{lllll}
(A_1) & \forall x, y. & s(x) = s(y) & \rightarrow & x = y \\
(A_2) & \forall x. & x \neq 0 & \rightarrow & \exists y. x = s(y) \\
(A_3) & \forall x. & 0 \neq s(x) & & \\
(A_4^n) & \forall x. & x \neq s^n(x) & &
\end{array}$$

Soient deux modèles M_1 et M_2 de $\mathcal{T}$. On note $d_i(a, b)$ la fonction définie sur le domaine D_i de M_i par : $d_i(a, b) = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, a = s^n_{M_i}(b)\}$. Le minimum est $+\infty$ s'il n'y a pas de tels entiers.

1. Montrer que, pour tout i, pour tous $a, b, c \in D_i$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_i(s^k(a), a) = k$ et que $d_i(a, b) + d_i(b, c) < +\infty$ entraine $d_i(a, b) + d_i(b, c) = d_i(a, c)$.
2. Montrer que, pour tous $a \in D_i$, $k \in \mathbb{N}$, si $d_i(a, 0_{M_i}) \geq k$, il existe $b \in D_i$ tel que $a = s^k_{M_i}(b)$
3. On considère un jeu de Erhenfeucht-Fraïssé sur M_1, M_2 où les coups successifs de D et S sont donnés par les séquences $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ avec, pour tout i, $a_i \in D_1$ et $b_i \in D_2$. Montrer que, étant donné n, D a une stratégie qui permet d'assurer l'invariant $\forall i \leq n, \forall j_1, j_2 \leq i$, si $(d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) \leq 2^{n-i}$ ou $d_2(b_{j_1}, b_{j_2}) \leq 2^{n-i})$ alors $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) = d_2(b_{j_1}, b_{j_2})$.
4. Montrer que $\mathcal{T}$ est complète
5. Les axiomes A_4^n sont ils tous nécessaires ? Peut-on remplacer cet ensemble d'axiomes par un sous-ensemble fini d'axiomes en conservant la complétude ? Justifier.