Chapitre 11

Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

Le premier objectif est de donner une caractérisation algébrique (en fait, en termes de jeux, car c'est plus intuitif) de la propriété d'équivalence élémentaire. Cette caractérisation permet par exemple de prouver que certaines propriétés ne sont pas définissables au premier ordre parce qu'on peut exhiber deux structures, l'une vérifiant la propriété et l'autre non, qui ne peuvent être distinguées par aucune formule de taille fixée.

11.1 Structures équivalentes

On se fixe ici, et dans toute la suite, un alphabet de symboles de fonction $\mathcal{F}$ et un alphabet de symboles de prédicats $\mathcal{P}$ qui sont finis. $\mathcal{P}$ est supposé contenir au moins le symbole d'égalité et on ne considère que des structures qui satisfont les axiomes de l'égalité (ou les formules qui contiennent les axiomes de l'égalité).

Rappelons que deux structures du premier ordre, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont *élémentairement équivalentes*, ce que nous écrirons $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$ si, pour toute formule close ϕ, $\mathcal{S}_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2 \models \phi$.

Deux structures $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ sont *m-indistinguables* si, pour toute formule close ϕ de taille au plus m, $\mathcal{S}_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2 \models \phi$. On note $\mathcal{S}_1 \equiv_m \mathcal{S}_2$ cette relation.

Le *rang* d'une formule ϕ est le nombre maximal de quantificateurs sur un chemin :

- $\mathsf{rg}(\phi) = 0$ si ϕ est une formule atomique
- $\mathsf{rg}(\phi \wedge \psi) = \mathsf{rg}(\phi \vee \psi) = \mathsf{rg}(\phi \to \psi) = \max(\mathsf{rg}(\phi), \mathsf{rg}(\psi))$
- $\mathsf{rg}(\neg\phi) = \mathsf{rg}(\phi)$
- $\mathsf{rg}(\exists x.\phi) = \mathsf{rg}(\forall x.\phi) = 1 + \mathsf{rg}(\phi)$

On notera $\mathcal{S}_1 \simeq_n \mathcal{S}_2$ si, pour toute formule close ϕ de rang au plus n, $\mathcal{S}_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2 \models \phi$.

Lemme 11.1.1 *$\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$ ssi pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_1 \equiv_m \mathcal{S}_2$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_1 \simeq_n \mathcal{S}_2$.*

Exercice 214
Montrer qu'une théorie T est complète si et seulement si deux modèles quelconques de T sont élémentairement équivalents.

Une formule est *plate* si ses formules atomiques sont d'une des trois formes :
- $x = y$ où x, y sont des variables
- $x = f(x_1, \dots, x_n)$ où $x, x_1, \dots, x_n$ sont des variables
- $R(x_1, \dots, x_n)$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des variables

Lemme 11.1.2 *Toute formule de taille n est logiquement équivalente à une formule plate de rang au plus n.*

Exercice 215
Démontrer le lemme 11.1.2.

11.2 Isomorphismes partiels

Definition 11.2.1 *Un* isomorphisme partiel *h de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$ est une fonction (partielle) injective du domaine D_1 de $\mathcal{S}_1$ dans le domaine D_2 de $\mathcal{S}_2$ telle que*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout symbole de fonction $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, pour tous $a_1, \dots, a_n, a \in \mathsf{Dom}(h)$,*
$$f^{\mathcal{S}_1}(a_1, \dots, a_n) = a \quad ssi \quad f^{\mathcal{S}_2}(h(a_1), \dots, h(a_n)) = h(a)$$
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout symbole de relation de relation R d'arité n, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathsf{Dom}(h)$,*
$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{S}_1} \quad ssi \quad (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathcal{S}_2}$$

Exemple 11.2.1 Soit $\mathcal{F} = \{0(0), +(2)\}, \mathcal{P} = \{=\}$ et les deux groupes additifs $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$. La fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $h(3) = 4$ et $h(4) = 12$ est un isomorphisme partiel car il n'y a aucune formule $x + y = z$ qui soit satisfaite avec des valuations de x, y, z dans $\{3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$ (resp. de $\{4, 12\} \subseteq \mathbb{Z}$).

Exercice 216
Peut-on prolonger l'isomorphisme partiel de la question précédente à $h(6)$? Justifier.

Exercice 217
Soit $\mathcal{F} = \emptyset, \mathcal{P} = \{R(2), =\}$. On considère la structure $\mathcal{S}_1$ qui consiste en un graphe non-orienté G à 5 sommets $a_1, \dots, a_5$ reliés en anneau. La structure $\mathcal{S}_2$ consiste en deux copies disjointes de G. Montrer que, quels que soient les deux sommets b_1, b_2 choisis dans le domaine de $\mathcal{S}_2$, on peut trouver deux sommets dans G tels que la fonction définie par $h(a_1) = b_1$ et $h(a_2) = b_2$ soit un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$. Qu'en est il pour 3 sommets ?

Les isomorphismes partiels sont suffisants pour caractériser la 0-distinguabilité quand $\mathcal{F}$ est vide :

Lemme 11.2.1 *$a_1, \dots, a_n \in D_1$ et $b_1, \dots, b_n \in D_2$. La fonction partielle définie par $Dom(h) = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $h(a_i) = b_i$ pour $i = 1, ...n$ est un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$ ssi, pour toute formule atomique plate ϕ, de variables libres $x_1, \dots, x_n$*
$$\mathcal{S}_1, \{x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n\} \models \phi \quad ssi \quad \mathcal{S}_2, \{x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n\} \models \phi$$

Preuve:
On note $\sigma_1 = \{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\}$ et $\sigma_2 = \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\}$. Si h est un isomorphisme partiel, alors

1. $a_i = a_j$ ssi $b_i = b_j$ donc $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models x_i = x_j$ ssi $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models x_i = x_j$,
2. $f^{\mathcal{S}_1}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = a_i$ ssi $f^{\mathcal{S}_2}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) = b_i$ donc $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models x_i = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ ssi $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models x_i = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$,
3. $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \in R^{\mathcal{S}_1}$ ssi $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) \in R^{\mathcal{S}_2}$. Donc $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ ssi $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$.

Il en résulte que $\mathcal{S}_1, \sigma_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2, \sigma_2 \models \phi$

Réciproquement, si, pour toute formule atomique plate ϕ, $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models \phi$ ssi $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models \phi$, en particulier pour les formules $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ et les formules $x_i = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$.

Exercice 218
Montrer que le lemme ci-dessus est faux si ϕ n'est pas plate.

Exercice 219
Donner un exemple de deux structures $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ telles que $\mathcal{S}_1 \not\equiv \mathcal{S}_2$ et il existe un isomorphisme partiel de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$ dont le domaine a 3 éléments au moins.

11.3 Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

Un jeu (de EF) est un jeu à deux joueurs S (spoiler) et D (duplicator), se jouant sur une paire de structures $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$. À nombre de rondes non-fixé, S commence par choisir un nombre de rondes $n \in N$. Puis, pour $i = 1$ à n,

– S choisit a_i^j dans un des domaines D_j de l'une des structures
– D choisit a_i^{2-j} dans le domaine D_{2-j}.

Le joueur D gagne si La séquence des paires (a_i^1, a_i^2) définit un isomorphisme partiel h de domaine $\{a_1^1, \ldots, a_n^1\}$ de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$. Une *stratégie* du joueur D est une paire d'applications f_j $(i = 1, 2)$ de $(\bigcup_{i=1}^{n-1}(D_1 \uplus D_2)^i) \times D_j$ dans D_{2-j}. Une stratégie f_1, f_2 est *gagnante* si, pour toute séquence $a_1^{j_1}, \ldots, a_n^{j_n}$ telle que $a_i^{j_i} \in D_{j_i}$, (les coups de S), la fonction h définie par $h(a_i^{j_i}) = f_1(a_1^{j_1}, \ldots, a_i^{j_i})$ si $j_i = 1$ et $h(f_2(a_1^{j_1}, \ldots, a_i^{j_i})) = a_1^{j_i}$ sinon définit bien de manière unique un isomorphisme partiel entre les structures.

Exemple 11.3.1 Soit $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{>, =\}$ et les deux structures $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où les relations ont leur interprétation usuelle. Une stratégie (gagnante) de D est définie de la manière suivante : étant donné un isomorphisme partiel $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$, si $a_{n+1} \in \mathbb{Q}$, D choisit $b_{n+1} \in \mathbb{R}$ comme suit :

– si $n = 0$, alors $b_1 = 0$
– si $a_{n+1} = a_i$, alors $b_{n+1} = b_i$.
– si $a_{n+1} > \max(a_1, \ldots, a_n)$, alors $b_{n+1} = \max(b_1, \ldots, b_n) + 1$
– si $a_{n+1} < \min(a_1, \ldots, a_n)$, alors $b_{n+1} = \min(b_1, \ldots, b_n) - 1$
– sinon, soit $a_{i_0} = \max\{a_i \mid a_i < a_{n+1}\}$ et $a_{i_1} = \min\{a_i \mid a_i > a_{n+1}\}$, $b_{n+1} = \frac{b_{i_0} + b_{i_1}}{2}$

Si S choisit de jouer dans $\mathbb{R}$, le coup de D est définie de manière symétrique.

Le fait qu'il s'agit bien d'une stratégie gagnante est laissé en exercice.

Théorème 11.3.1 *Si le joueur D a une stratégie gagnante pour un jeu en n rondes sur $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ alors $\mathcal{S}_1 \equiv_n \mathcal{S}_2$.*

Réciproquement, si $\mathcal{S}_1 \simeq_n \mathcal{S}_2$ alors D a une stratégie gagnante en n rondes sur $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$.

Preuve:

Supposons d'abord que D a une stratégie gagnante (f_1, f_2). On montre, par récurrence sur $|\phi|$ que, pour toute formule plate ϕ sans quantificateur universel, de rang inférieur à n, si $\mathrm{Var}(\phi) = \{x_1, \dots, x_k\}$ et h est un isomorphisme partiel de domaine $\{a_1, \dots, a_k\}$ de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$, alors

$\mathcal{S}_1, \{x_1 \mapsto a_1, \dots, x_k \mapsto a_k\} \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2, \{x_1 \mapsto h(a_1), \dots, x_k \mapsto h(a_k)\} \models \phi$.

Dans la suite, on note $\sigma_1 = \{x_1 \mapsto a_1, \dots, x_k \mapsto a_k\}$ et $\sigma_2 = \{x_1 \mapsto b_1, \dots, x_k \mapsto b_k\}$ où $b_i = h(a_i)$.

- si ϕ est une formule atomique, on utilise le lemme 11.2.1.
- si $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models \phi_1 \wedge \phi_2$ ssi $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models \phi_1$ et $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models \phi_2$ ssi (par hypothèse de récurrence) $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models \phi_1$ et $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models \phi_2$ ssi $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models \phi_1 \wedge \phi_2$. Le cas d'une disjonction ou d'une implication est similaire.
- Si $\phi = \neg\psi$, alors on utilise l'hypothèse de réccurrence : $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models \psi$ ssi $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models \psi$ donc $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \not\models \psi$ ssi $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \not\models \psi$ donc $\sigma_1, \mathcal{S}_1 \models \neg\psi$ ssi $\sigma_2, \mathcal{S}_2 \models \neg\psi$
- Si $\phi = \exists x.\psi$, $\mathcal{S}_1, \sigma_1 \models \phi$ ssi il existe un $a \in D_1$, $\mathcal{S}_1, \sigma_1 \uplus \{x \mapsto a\} \models \phi$. Soit alors $b \in D_2$, déterminé par la stratégie du duplicateur, telle que, en étendant h par $h(a) = b$, on obtienne encore un isomorphisme partiel. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{S}_2, \sigma_2 \uplus \{x \mapsto b\} \models \phi$ et donc $\mathcal{S}_2, \sigma_2 \models \exists x.\phi$. La réciproque se prouve de même.

On applique maintenant ce résultat à une formule ϕ plate, sans variable libre, sans $\forall$, de rang au plus n : $\mathcal{S}_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2 \models \phi$.

Le résultat reste vrai en supprimant l'hypothèse "sans $\forall$", puisque $\forall x.\phi \models\!\mid \neg\exists x \neg\phi$ qui a même rang.

Enfin, en utilisant le lemme 11.1.2, on peut remplacer "plate de rang au plus n" par "de taille au plus n". On obtient ainsi $\mathcal{S}_1 \equiv_n \mathcal{S}_2$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{S}_1 \simeq_N \mathcal{S}_2$

Si $b_1, \dots, b_n \in D_2$, on note $\Phi(b_1, \dots, b_n)$ l'ensemble des formules plates atomiques ou leur négation, à n variables libres $x_1, \dots, x_n$, qui sont satisfaites par $b_1, \dots, b_n$. Φ est un ensemble fini puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{R}$ sont finis. On construit alors, par récurrence sur m la suite de formules :

$$\phi_0^{b_1,\dots,b_n}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{\phi \in \Phi(b_1,\dots,b_n)} \phi$$

$$\phi_{m+1}^{b_1,\dots,b_n}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x_{n+1}. \bigvee_{b \in D_2} \phi_m^{b_1,\dots,b_n,b}(x_1, \dots, x_{n+1})) \wedge (\bigwedge_{b \in D_2} \exists x_{n+1}. \phi_m^{b_1,\dots,b_n,b}(x_1, \dots, x_{n+1}))$$