Chapitre 9

Théorèmes d'incomplétude

9.1 Théories logiques

Definition 9.1.1 *Une* théorie du premier ordre *sur un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonction et un ensemble $\mathcal{P}$ de symboles de prédicats est un ensemble T de formules du premier ordre sans variable libre.*

Une théorie $\mathcal{T}$ est cohérente *si, pour toute formule sans variable libre ϕ, $\mathcal{T} \not\models \phi$ ou $\mathcal{T} \not\models \neg\phi$.*

Une théorie $\mathcal{T}$ est complète *si, pour toute formule sans variable libre ϕ, $\mathcal{T} \models \phi$ ou $\mathcal{T} \models \neg\phi$.*

Si A est un ensembLe de formules sans variable libre, $Th(A)$, la théorie engendrée par A *(aussi appelée* théorie axiomatisée par A*) est l'ensemble $\{\phi : A \models \phi\}$.*

Si $\mathcal{S}$ est une structure du premier ordre, $Th(\mathcal{S})$ est la théorie de la structure $\mathcal{S}$ *: $Th(\mathcal{S}) = \{\phi : \mathcal{S} \models \phi\}$.*

Lemma 9.1.1 *Une théorie complète est récursive ssi elle est récursivement énumérable.*

Lemma 9.1.2 *Si $\mathcal{S}$ est une structure du premier ordre, $Th(\mathcal{S})$ est cohérente et complète.*

Dans la suite, on supposera un système d'inférence récursif, correct et complet pour la logique du premier ordre. Un tel système d'inférence existe : pour tester si $A \models \phi$, il suffit de vérifier que $A, \neg\phi \vdash \perp$ et nous avons vu dans la partie logique du premier ordre un système de preuve réfutationnellement complet. On notera $\vdash$ la relation de déduction pour ce système d'inférence. On a donc $A \vdash \phi$ ssi $A \models \phi$.

9.1.1 Exemples de théories

Si $\mathbb{N}$ est la structure des entiers, avec l'inégalité, $0, 1$, l'addition et la multiplication, $Th(\mathbb{N})$ est l'ensemble des formules vraies dans les entiers. Cette théorie n'est pas récursive comme nous le verrons plus loin.

$$\begin{array}{lrc}
(A_1) & \forall x. & s(x) \neq 0 \\
(A_2) & \forall x, y. & s(x) = s(y) \Rightarrow x = y \\
(A_3) & \forall x. & x + 0 = x \\
(A_4) & \forall x, y. & x + s(y) = s(x + y) \\
(A_5) & \forall x. & x \times 0 = 0 \\
(A_6) & \forall x, y. & x \times s(y) = (x \times y) + x \\
(A_7) & \forall x. & x \neq 0 \Rightarrow \exists y. x = s(y)
\end{array}$$

FIGURE 9.1 – Axiomes de l'arithmétique élémentaire

À l'inverse, nous verrons (encore plus tard) que $Th(\mathbb{R})$, la théorie de la structure des nombres réels avec l'inégalité, 0,1, l'addition et la multiplication est une théorie récursive (et complète et cohérente d'après le lemme 9.1.2).

Arithmétique élémentaire Dans les deux exemples suivant, $\mathcal{F}$ contient $\{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$.

On considère maintenant l'*arithmétique élémentaire* Q engendrée par les formules de la figure 9.1 et les axiomes de l'égalité.

Nous verrons que Q n'est pas complète et n'est pas récursive.

Exercice 179
Montrer que $Q \not\models \forall x. x \neq s(x)$.

Exercice 180
Donner un modèle de Q dans lequel l'addition n'est pas commutative.

Arithmétique de Peano L'*arithmétique de Peano* est la théorie PA, engendrée par les axioms de la figure 9.1, les axiomes de l'égalité ainsi que l'ensemble (récursif) d'axiomes :e

$$(\phi(0) \wedge (\forall x. \phi(x) \rightarrow \phi(s(x)))) \rightarrow \forall x. \phi(x)$$

où ϕ est une formule du premier ordre arbitraire avec une variable libre.

Exercice 181
Expliquer pourquoi l'axiomatisation de PA est récursive.

Exercice 182
Montrer que $PA \vdash \forall x, y.\ x + y = y + x$

D'autres exemples de théories seront donnés dans le chapitre 12.

9.2 Codages des formules

On suppose donnés un ensemble dénombrable de symboles de fonction avec leur arité (on notera $f[n]m$ la $m$ième fonction d'arité n, m et n étant des mots de $\{0,1\}^*$ représentant des entiers en binaires), un nombre dénombrable de symboles de prédicats avec leur arité (on notera $P[n]m$ ces symboles de prédicat) et un nombre dénombrable de variables (vn).

Les formules du premier ordre sur cet alphabet sont alors des mots sur l'alphabet $\{0, 1, p, f, v, \vee, \wedge, \rightarrow, \neg, "[", "]", "(", ")", ",", ""\{", "\}"\}$. Ils peuvent être considérés comme des entiers écrits dans une base appropriée. On note $< \phi >$ l'entier associé à ϕ. Noter que $< \phi > = < \psi >$ entraine $\phi = \psi$. Dans la suite on parlera d'ensemble de termes ou de formules récursifs en faisant référence à leur codage dans les entiers.

Par ailleurs, on supposera que les entiers peuvent être représentés dans la logique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\overline{n}$ le terme qui représente n. On suppose ce codage récursif : $n \mapsto < \overline{n} >$ est une fonction récursive.

On obtient, via par exemple l'équivalence avec les machines de Turing (théorème 8.3.1), les résultats de récursivité :

Lemme 9.2.1 *Les fonctions/ensembles suivants sont récursifs :*
- $\{< \phi > \mid \phi \in CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})\}$
- *Le sous-ensemble du précédent des formules ayant exactement une variable libre.*
- *La fonction qui à $n, < \phi >$ associe $\phi\{x \mapsto \overline{n}\}$ si ϕ est une formule avec exactement une variable libre x et $\overline{0}$ sinon.*

Dans la suite, on aura aussi besoin de représenter les preuves. On supposera que l'ensemble de symboles de prédicats contient au moins l'égalité. On considérera que A est un ensemble de formules qui contient au moins les axiomes de légalité.

Un système de règles d'inférence est un ensemble de tupes $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi$ de formules ($\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont les prémisses et ϕ la conclusion).

Une *preuve* de $A \vdash \phi$ est un arbre fini, étiqueté par des formules et tel que
- Les feuilles sont étiquetées par des éléments de A
- Pour tout noeud qui n'est pas une feuille, si son étiqueté est ϕ, il existe des formules $\phi_1, \ldots, \phi_n$ telles que ses fils soient respectivement étiquetés par$\phi_1, \ldots, \phi_n$ et $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi$ est une règle d'inférence.

Lemme 9.2.2 *Si l'ensemble de règles d'inférence est récursif, et A est un ensemble récursivement énumérable de formules, alors l'ensemble des formules ϕ telles que $A \vdash \phi$ (les théorèmes de la théorie engendrée par A) est récursivement énumérable.*

Exercice 183
Montrer le lemme 9.2.2.

On considérera un système d'inférence récursif quelconque, qui est complet (pour la validité) : si $S \models \phi$, alors $S \vdash \phi$. Si ce n'était pas le cas, il n'y aurait aucune chance que la théorie $Th(S)$ soit cohérente et complète. (Et si l'ensemble de règles d'inférence n'était pas récursif, on ne pourrait pas vérifier les preuves). Si bien que $S \models \phi$ ssi $S \vdash \phi$. On pourra donc utiliser indifférement les notations $S \vdash \phi, S \models \phi$ dans la suite.

Chaque arbre de preuve π s'écrit aussi $R(\phi, \pi_1, \dots, \pi_n)$ où R est la dernière règle d'inférence utilisée dans la preuve, ϕ est la formule prouvée et $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont les preuves des prémisses de la règle. On code alors les preuves dans les entiers, comme on l'a fait pour les formules ; il suffit de rajouter un symbole pour chaque règle d'inférence (symbole éventuellement indicé par un entier). Le codage $< \pi > \in \mathbb{N}$ d'une preuve π satisfait alors les propriétés suivantes :

- $\{< \pi > \mid \pi$ est une preuve$\}$ est récursif.
- la fonction qui à $< \pi >$ associe $< \phi >$ où ϕ est la conclusion de π, et à tout autre entier associe 0, est une fonction récursive totale
- la fonction qui à $< \pi >$ associe l'entier codant le tuple des codes des hypothèses (feuilles) de la preuve π (et 0 si l'entier n'est pas le code d'une preuve) est une fonction récursive totale.

9.3 Fonctions représentables

Definition 9.3.1 *Une fonction f sur les entiers est* représentable *dans une théorie T s'il existe une formule ϕ_f telle que, pour tous entiers $n_1, \dots, n_k$ et tout entier m,*

1. *$f(n_1, \dots, n_k) = m$ entraine $T \vdash \phi_f(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m})$*
2. *$f(n_1, \dots, n_k) \neq m$ entraine $T \vdash \neg\phi_f(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m})$.*
3. *$f(\vec{n}) = m$ entraine $T \vdash \forall x.\phi_f(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, x) \to x = \overline{m}$.*

Exercice 184
Montrer que, si pour tous entiers n, m tels que $n \neq m$, $T \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$, alors la condition 2. de la définition 9.3.1 est une conséquence des autres.

Un prédicat P sur les entiers est *représentable* dans T ssi sa fonction caractéristique est représentable dans T.

Exercice 185
Montrer que le prédicat $P \subseteq \mathbb{N}^k$ est représentable dans T ssi il existe une formule ϕ_P telle que

1. $(n_1, \dots, n_k) \in P$ entraine $T \vdash P(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k})$
2. $(n_1, \dots, n_k) \notin P$ entraine $T \vdash \neg P(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k})$

Une théorie T est *cohérente* s'il n'y a pas de formule ϕ telle que $T \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Exercice 186
Montrer que si T est cohérente, on peut remplacer les implications dans les points 1 et 2 de la définition 9.3.1 par des équivalences.

Les théorèmes d'incomplétude sont basés sur la représentabilité des fonctions récursives dans des théories de l'arithmétique. Remarquons d'abord l'indécidabilité des théories dans lesquelles les fonctions récursives sont représentables.

Lemme 9.3.1 *Si les fonctions récursives sont représentables dans la théorie T, et si T est cohérente, alors T n'est pas récursive.*

Preuve:
Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des théorèmes soit récursif. Soit

$$P = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists \phi . n =< \phi(x) > \& T \vdash \phi\{x \mapsto \overline{m}\}\}$$

P est alors récursif. Donc l'ensemble suivant aussi :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid (n, n) \notin P\}$$

Comme les fonctions récursives sont représentables, il existe une formule $\psi(x)$ telle que $T \vdash \psi\{x \mapsto \overline{n}\}$ ssi $n \in E$. Mais alors on considère $\theta = \psi\{x \mapsto \overline{< \psi >}\}$.

$$T \vdash \theta \Leftrightarrow < \psi > \in E \Leftrightarrow (< \psi >, < \psi >) \notin P \Leftrightarrow T \not\vdash \theta$$

Ce qui est absurde. (Noter qu'on utilise la cohérence pour avoir les équivalences).

Corollaire 9.3.1 *Soit A est un ensemble récursif de formules closes et $T = Th(A)$. Si les fonctions récursives sont représentables dans T y et si T est cohérente, alors T est incomplète.*

Puisque sinon, la théorie T serait récursive car récursivement énumérable et co-récursivement énumérable.

Exercice 187
Que se passe-t-il si l'on enlève l'hypothèse de cohérence dans le lemme 9.3.1 ?

Exercice 188
Que se passe-t-il si l'on enlève la condition 2, dans la définition 9.3.1 ?

9.4 Indécidabilité de l'arithmétique

Un des premiers objectifs est de montrer que les fonctions récursives sont représentables dans une théorie T minimale de l'arithmétique. Alors, d'après le lemme 9.3.1, l'ensemble des théorèmes n'est pas récursif et donc la théorie est ou bien incohérente ou bien incomplète.

On peut déjà noter que le résultat d'incomplétude est, d'une manière générale, déjà acquis ; Soit $Th(\mathbb{N})$ les énoncés du premier ordre sur l'alphabet $*, +, 0, 1, =$ $, \geq$ et qui sont valides dans les entiers.

Théorème 9.4.1 $Th(\mathbb{N})$ *n'est pas récursivement énumérable.*

Preuve:
En effet, s'il était récursivement énumérable, il serait aussi co-récursivement énumérable puisque l'ensemble des négations des énoncés non-valides serait récursivement énumérable. Il en résulte que $Th(\mathbb{N})$ serait récursif. De plus, les fonctions récursives sont représentables dans $Th(\mathbb{N})$. En effet, d'après le théorème 8.3.2, il suffit de montrer que les fonctions de $\mathcal{C}$ sont représentables. Les fonctions initiales sont trivialement représentables. Il suffit de montrer que

les fonctions représentables dans $Th(\mathbb{N})$ sont closes par minimisation et composition. Pour la composition,soit $g(\vec{x}) = f(h_1(\vec{x}), \ldots, h_k(\vec{x}))$. Si $\phi_f, \phi_{h_1}, \ldots, \phi_{h_k}$ sont les formules représentant $f, h_1, \ldots, h_k$ resp. alors soit

$$\phi_g(\vec{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists z_1, \ldots, z_k.\phi_f(z_1, \ldots, z_k, y) \wedge \phi_{h_1}(\vec{x}, z_1) \wedge \ldots \wedge \phi_{h_k}(\vec{x}, z_k)$$

Pour tous entiers $\vec{n}, m$, $\phi_g(\vec{n}, m) \in Th(\mathbb{N})$ ssi il existe des entiers $p_1, \ldots, p_k$ tels que $\phi_f(p_1, \ldots, p_k, m)$, $\phi_{h_1}(\vec{n}, p_1), \ldots, \phi_{h_k}(\vec{n}, p_k) \in Th(\mathbb{N})$. Par hypothèse de récurrence, ces formules sont dans la théorie ssi $m = f(p_1, \ldots, p_k)$, $p_1 = h_1(\vec{n}), \ldots, p_k = h_k(\vec{n})$. Et donc ssi $m = g(\vec{n})$.

Pour la minimisation, soit $g(\vec{x}) = \min_y(f(\vec{x}, y) = 0)$. On définit alors

$$\phi_g(\vec{x}, z) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_f(\vec{x}, z, 0) \wedge \forall y, \forall z'((y < z) \wedge \phi_f(\vec{x}, y, z')) \Rightarrow z' > 0$$

À nouveau, on obtient que ϕ_g représente g dans $Th(\mathbb{N})$.

Alors, par le lemme 9.3.1, l'ensemble des théorèmes de $Th(\mathbb{N})$ n'est pas récursif. Mais $Th(\mathbb{N})$ est cohérente et contient tous ses théorèmes. Donc $Th(\mathbb{N})$ n'est pas récursive. Contradiction.

De cette preuve, on déduit aussi que :

Corollaire 9.4.1 *Il n'existe pas d'axiomatisation récursive de* $Th(\mathbb{N})$.

Preuve:
En effet, d'après le lemme 9.2.2, si A est récursive, l'ensemble des formules $\phi \in Th(A)$ est récursivement énumérable et ne peut donc pas coïncider avec $Th(\mathbb{N})$, d'après le théorème 9.4.1.

Autrement dit : il existe des énoncés vrais non démontrables dans les entiers.

Exercice 189

1. Montrer qu'il existe des fonctions non récursives qui sont représentables dans $Th(\mathbb{N})$.
2. Montrer qu'il existe des fonctions (de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) non représentables dans $Th(\mathbb{N})$.

Exercice 190

Montrer que toute axiomatisation récursive des entiers (avec addition, multiplication et égalité) est incohérente ou incomplète.