Logique L3. Examen partiel

12 novembre 2012. Durée 3h.

Tous les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Le barême est indicatif. La longueur des solutions indiquée est celle du corrigé imprimé (il peut y avoir mieux ou moins bien) Tous les résultats et les preuves du cours peuvent être utilisés en les mentionnant. Les exercices vus en TD doivent être redémontrés s'ils sont utilisés.

Exercice 1

Dans chaque cas, dire si le jugement est prouvable en NJ_0 et s'il est prouvable en NK_0. Pour chacun des systèmes de preuve, lorsqu'il est prouvable, en donner une preuve et lorsqu'il n'est pas prouvable, le justifier. ([26 lignes, 7 points])

1. $B \vdash A \to B$
2. $(A \vee B) \to B \vdash B \to A$
3. $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \vee B$
4. $\neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B) \vdash \neg A \vee \neg B$

Exercice 2

$\mathcal{P}$ est un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. On considère le calcul propositionnel en forme clausale. On note $\vdash_R$ la relation de déduction associée aux règles de résolution binaire et factorisation binaire.

La *stratégie du support* par rapport à un ensemble $\mathcal{E}$ de clauses, consiste à restreindre la règle de résolution binaire au cas où l'une des prémisses de la règle est dans $\mathcal{E}$. Il n'y a pas de restriction sur la règle de factorisation. On note $\mathcal{E} \vdash_S C$ s'il existe une preuve de C à partir de $\mathcal{E}$ utilisant la stratégie du support associée à $\mathcal{E}$ (autrement dit, à chaque application de règle, l'une des prémisses est dans l'ensemble de clauses initial).

La stratégie *du support positive* consiste à n'appliquer la règle de résolution

$$\frac{C \vee P \quad C' \vee \neg P}{C \vee C'}$$

que lorsque $C \vee P \in \mathcal{E}$. On note $\mathcal{E} \vdash_{SP} C$ s'il existe une preuve de C à partir de $\mathcal{E}$ en utilisant la stratégie du support positive associée à $\mathcal{E}$ (donc $\vdash_{SP} \subseteq \vdash_S$).

1. Donner un ensemble de clauses $\mathcal{E}$ insatisfaisable tel que $\mathcal{E} \not\vdash_S \bot$. ([9 lignes,1.5pts])
2. Donner un ensemble de clauses $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} \vdash_S \bot$ et $\mathcal{E} \not\vdash_{SP} \bot$.([9 lignes, 1.5pts])

3. Une clause de Horn est une clause contenant au plus un littéral positif. Montrer que, si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses de Horn, et $\mathcal{E} \vdash_R C$, alors C est une clause de Horn.([9 lignes, 1pt]
4. On suppose ici que $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses de Horn. Si π est une preuve de $\mathcal{E} \vdash_R C$, montrer, par récurrence sur la taille de π, qu'il existe une preuve π' de $\mathcal{E} \vdash_{SP} C$, de taille inférieure ou égale à celle de π . En déduire que, si $\mathcal{E}$ est insatisfaisable, alors $\mathcal{E} \vdash_{SP} \perp$ (donc que la stratégie du support positive est réfutationellement compète pour les clauses de Horn).([34 lignes, 3pts])

Exercice 3

$\mathcal{P} = \{R\}$ contient un symbole de prédicat binaire et $\mathcal{F} = \emptyset$.

On note Φ_0 l'ensemble des formules sans quantificateur construites sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$.

On rappelle que $\mathcal{M} \models \phi$ ssi la forme Skolémisée $\hat{\phi}$ de ϕ a un modèle dont le domaine est le même que celui de $\mathcal{M}$.

1. Soit
$$\Phi_1 = \{\exists x_1, \ldots, \exists x_n, \forall y_1, \ldots, \forall y_m.\phi \mid \phi \in \Phi_0, \mathsf{VL}(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}\}$$
Montrer que, si $\phi \in \Phi_1$ est satisfaisable, alors ϕ a un modèle fini. ([5 lignes, 1.5 points])
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Donner une formule $\phi_k \in \Phi_1$ qui est satisfaisable et qui n'a pas de modèle de cardinal inférieur ou égal à k. ([7 lignes, 1 point])
3. Soit ϕ la formule
$$\exists x, \forall y, \exists z. \neg R(y, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge R(y, z)$$
Montrer que ϕ n'a pas de modèle de cardinal inférieur ou égal à 2. Donner un modèle de ϕ de cardinal 3. ([16 lignes,2pts])
4. Donner une formule ψ de la forme
$$\exists x \forall y, \exists z, \forall y_1, \ldots \forall y_m.\theta$$
où $\theta \in \Phi_0$ et $\mathsf{VL}(\theta) \subseteq \{x, y, z, y_1, \ldots, y_m\}$ telle que ψ est satisfaisable et n'a pas de modèle fini. ([15 lignes,2pts])

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\,(Ax) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi}\,(Aff) \qquad \frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\,(Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\,(\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\,(\wedge E_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\wedge E_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\,(\vee I_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\,(\vee I_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\,(\vee E)$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\,(\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}\,(\neg E)$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}\,(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \to \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to E)$$

Figure 1 – Règles d'inférence de la déduction naturelle propositionnelle classique NK_0

Solution

Exercice 1

1. Le jugement est prouvable en NJ_0 :

$$\dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash B}\,Ax.}{B \vdash A \to B}\to I$$

   Il est donc aussi prouvable dans NK_0, en utilisant la même preuve.

2. L'interprétation suivante falsifie le jugement : $I = \{B\}$. En effet, $I \models (A \lor B) \to B$ et $I \not\models B \to A$. Par correction de la déduction, il n'est pas prouvable en NK_0 et donc pas non plus dans NJ_0

3. Le jugement est prouvable en NK_0 :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg A \lor \neg B), \neg A \vdash \neg A}\,Ax}{\neg(\neg A \lor \neg B), \neg A \vdash \neg A \lor \neg B}\lor I_1 \quad \dfrac{}{\neg(\neg A \lor \neg B), \neg A \vdash \neg(\neg A \lor \neg B)}\,Ax}{\neg(\neg A \lor \neg B), \neg A \vdash \bot}\neg E}{\neg(\neg A \lor \neg B) \vdash A}Abs}{\neg(\neg A \lor \neg B) \vdash A \lor B}\lor I_1$$

   Il n'est pas prouvable dans NJ_0. Il suffit, par correction, de donner une structure de Kripke $\mathcal{K}$ et $\alpha \in \mathcal{K}$ tels que $\alpha \not\Vdash A \lor B$ et $\alpha \Vdash \neg(\neg A \lor \neg B)$.

   On considère : $\mathcal{K} = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha \leq \beta$. $I(A) = \{\beta\}, I(B) = \{\beta\}$. Comme $\beta \Vdash A$, $\beta \Vdash B$ et $\alpha \leq \beta$, $\alpha \not\Vdash \neg A$ et $\alpha \not\Vdash \neg B$. Donc, pour tout $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \not\Vdash \neg A \lor \neg B$, et donc $\alpha \Vdash \neg(\neg A \lor \neg B)$. Par contre $\alpha \not\Vdash A \lor B$, ce qui permet de conclure.

4. Ce jugement est prouvable en NJ_0 (et donc en NK_0) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B), A, \neg A \vdash A}\,Ax \quad \dfrac{}{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B), A, \neg A \vdash \neg A}\,Ax}{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B), A, \neg A \vdash \bot}\neg E}{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B), A \vdash \neg\neg A}\neg I}{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B), A \vdash \neg\neg A \lor \neg\neg B}\lor I_1 \quad \dfrac{}{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B), A \vdash \neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B)}\,Ax}{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B), A \vdash \bot}\neg E}{\dfrac{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B) \vdash \neg A}{\neg(\neg\neg A \lor \neg\neg B) \vdash \neg A \lor \neg B}\lor I_1}\neg I$$

Exercice 2

1. Soit $E = \{P \lor P, \neg P \lor \neg P\}$. E est insatisfaisable. Par exemple, il y a une preuve de la clause vide par résolution :

$$\dfrac{\dfrac{P \lor P}{P}F \quad \dfrac{\neg P \lor \neg P}{\neg P}F}{\bot}R$$

Montrons qu'il n'y a pas de preuve de $\perp$ avec la stratégie du support indiquée : la dernière règle d'inférence d'une telle preuve est nécéssairement une résolution entre deux littéraux complémentaires. Or E ne contient aucun littéral. Aucune des prémisses de la dernière règle appliquée ne peut donc appartenir à E.

2. On prend $E = \{\neg P, P \vee P\}$. $E \vdash_S \perp$:

$$\dfrac{\neg P \qquad \dfrac{P \vee P}{P}\,F}{\perp}\,R$$

Comme dans la question précédente, une preuve de $\perp$ pour la stratégie SP doit se terminer par une étape de résolution entre les deux littéraux P et $\neg P$. Or $P \notin E$, il ne peut donc y avoir de preuve de $\perp$ suivant la stratégie SP.

3. Par récurrence sur la taille de la preuve : si la preuve ne contient aucune inférence, c'est l'hypothèse. Si la preuve se termine par une résolution :

$$\dfrac{C \vee P \quad C' \vee \neg P}{C \vee C'}\,R$$

Par hypothèse de récurrence, C ne contient que des littéraux négatifs et C' contient au plus un littéral positif. Donc $C \vee C'$ contient au plus un littéral positif. Si la preuve se termine par une factorisation, par hypothèse de récurrence ce ne peut être que sur un littéral négatif et, si $C \vee \neg P \vee \neg P$ contient au plus un littéral positif, alors il en est de même de $C \vee \neg P$.

4. Soit π une preuve par résolution de la clause vide. D'après la question précédente, tous les noeuds de la preuve sont étiquetés par des clauses de Horn. On montre par récurrence sur π qu'il existe une preuve de $\perp$ par la stratégie SP, de taille au plus celle de π.
   – Si la preuve est réduite à une feuille, alors c'est une preuve par la stratégie SP.
   – Si la preuve se termine par une factorisation, alors il suffit s'appliquer l'hypothèse de récurrence à la prémisse de la dernière règle. On obtient une preuve de C par la stratégie SP en factorisant la conclusion.
   – Si la dernière règle est une résolution :

$$\pi = \dfrac{\overset{\pi_1}{C_1 \vee P} \qquad \overset{\pi_2}{C_2 \vee \neg P}}{C_1 \vee C_2}\,R$$

   Par hypothèse de récurrence, il existe des preuves π'_1 et π'_2 de $C_1 \vee P$ et de $C_2 \vee \neg P$ par la stratégie SP. Si π'_1 est réduit à une feuille, il n'y a rien à faire : la preuve obtenue en remplaçant π_1 par π'_1 et π_2 par π'_2 dans π est une preuve utilisant SP. Sinon, deux cas se présentent, selon la dernière règle de π'_1 :
   – Si la dernière règle de π'_1 est une factorisation :

$$\pi'_1 = \dfrac{\overset{\pi''_1}{P \vee \neg Q \vee \neg Q \vee C'_1}}{P \vee \neg Q \vee C'_1}$$

Alors, la preuve

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi"_1\\ P \vee \neg Q \vee \neg Q \vee C_1'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \neg P \vee C_2\end{array}}{\neg Q \vee \neg Q \vee C_1' \vee C_2}\ R$$

est de taille $1 + |\pi"_1| + |\pi_2| \leq |\pi_1'| + |\pi_2| \leq |\pi_1| + |\pi_2| < |\pi|$. Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une preuve $\pi"$ utilisant SP de $\neg Q \vee \neg Q \vee C_2$ et $|\pi"| \leq |\pi| - 1$. Il suffit alors de choisir pour π' :

$$\pi' = \dfrac{\begin{array}{c}\pi"\\ \neg Q \vee \neg Q \vee C_1' \vee C_2\end{array}}{\neg Q \vee C_1' \vee C_2}\ F$$

– Si la dernière règle de π_1' est une résolution, on transforme la preuve comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{C_{11} \vee Q \qquad \begin{array}{c}\pi"_1\\ C_{12} \vee P \vee \neg Q\end{array}}{C_1 \vee P}\ R \qquad \begin{array}{c}\pi_2'\\ C_2 \vee \neg P\end{array}}{C}\ R \quad \Rightarrow \quad \dfrac{C_{11} \vee Q \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi"_1\\ P \vee C_{12} \vee Q\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2'\\ \neg P \vee C_2\end{array}}{\neg Q \vee C_{12} \vee C_2}\ R}{C}\ R$$

La preuve obtenue est de même taille. On applique alors à nouveau l'hypothèse de récurrence à la preuve de $\neg Q \vee C_{12} \vee C_2$. La preuve obtenue finalement est bien une preuve utilisant SP et de taille inférieure ou égale à celle de π.

On en déduit, en choisissant $C = \perp$ et par complétude réfutationnelle de la résolution que, si E est un ensemble de clause de Horn insatisfaisable, alors $E \vdash_{SP} \perp$

Exercice 3

1. $\exists x_1, \ldots, \exists x_n, \forall y_1, \ldots, \forall y_m.\psi \in \Phi_1$ est satisfaisable ssi la formule $\phi' = \forall y_1, \ldots, \forall y_m.\psi\{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\}$ construite sur $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}_n = \{a_1(0), \ldots, a_n(0)\}$ est satisfaisable. Par le théorème de Herbrand, ϕ' est satisfaisable ssi elle a un modèle de Herbrand. Or tous les modèles de Herbrand ont pour algèbre sous-jacente $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et sont donc de cardinal n (fini).
2. On définit
$$\phi_n = \exists x_1, \ldots, x_n. \bigwedge_{i \leq j} \neg R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{i > j} R(x_i, x_j)$$
$\mathcal{M}, \{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\} \models \bigwedge_{i \leq j} R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{i > j} R(x_i, x_j)$ ssi, pour tous $j < i$, $(a_i, a_j) \in R^{\mathcal{M}}$ et pour tous $i \leq j$, $(a_i, a_j) \notin R^{\mathcal{M}}$. Si $\mathcal{M} \models \phi_n$, on ne peut pas avoir $a_i = a_j$ avec $i \neq j$ car (supposant $i > j$ sans perte de généralité), $(a_j, a_j) \notin R^{\mathcal{M}}$ et $(a_i, a_j) \in R^{\mathcal{M}}$.
ϕ_n n'a donc pas de modèle de cardinal strictement inférieur à n.
3. On se ramène, sans perte de généralité à la formule $\hat{\phi} = \forall y.\neg R(y, y) \wedge \neg R(y, a) \wedge R(y, f(y))$.
Supposons que $\mathcal{M}$ est un modèle de cette formule. Soient a' et f' les interprétations respectives de a et f dans $\mathcal{M}$. $(a', a') \notin R^{\mathcal{M}}$ puisque $\mathcal{M} \models \forall y.\neg R(y, y)$. De même, $(a', f'(a')) \in R^{\mathcal{M}}$. Donc, en particulier, $a' \neq f'(a')$. Par ailleurs, $\mathcal{M} \models \forall y.R(y, f(y))$

donc $(f'(a'), f'(f'(a'))) \in R^{\mathcal{M}}$. On ne peut donc pas avoir $f'(f'(a')) = a'$ puisque $(f'(a'), a') \notin R^{\mathcal{M}}$. On ne peut pas non plus avoir $f'(f'(a')) = f'(a')$ car $\mathcal{M} \models \forall y. \neg R(y, y)$, et, en particulier, $(f'(a'), f'(a')) \notin R^{\mathcal{M}}$. Il en résulte que $\mathcal{M}$ a au moins 3 éléments distincts : $a', f'(a'), f'(f'(a'))$).
Soit maintenant $R^{\mathcal{M}}$ donnée par le tableau (matrice d'adjacence) suivant :

$R^{\mathcal{M}}$	a'	$f'(a')$	$f'(f'(a')$
a'	0	1	0
$f'(a')$	0	0	1
$f'(f'(a'))$	0	1	0

Et f' telle que $f'(f'(f'(a'))) = f'(f'(a'))$. La structure ainsi définie satisfait bien $\hat{\phi}$. ϕ a donc un modèle à 3 éléments et pas de modèle à 2 éléments ou moins.

4. Soit

$$\psi = \exists x, \forall y, \exists z, \forall y', \forall y''. \neg R(y, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge R(y, z) \wedge (\neg R(y, y') \vee \neg R(y', y'') \vee R(y, y"))$$

et

$$\hat{\psi} = \forall y, \forall y', \forall y''. \neg R(y, y) \wedge \neg R(y, a) \wedge R(y, f(y)) \wedge (\neg R(y, y') \vee \neg R(y', y'') \vee R(y, y''))$$

$\hat{\psi}$ est satisfaisable (et donc ψ aussi) : considérer la structure de domaine $\mathbb{N}$ dans laquelle f est interprété comme le successeur et R comme la relation $(n, n+1)$.
Soit $\mathcal{M} \models \hat{\psi}$. Par récurrence sur k, pour tous $k > 0$, $(f_{\mathcal{M}}^{n}(a_{\mathcal{M}}), f_{\mathcal{M}}^{n+k}(a_{\mathcal{M}})) \in R^{\mathcal{M}}$:
– Pour $k = 1$, c'est une conséquence de $\mathcal{M} \models \forall y. R(y, f(y))$.
– Pour $k > 1$, $(f_{\mathcal{M}}^{n+k-1}(a_{\mathcal{M}}), f_{\mathcal{M}}^{n+k}(a_{\mathcal{M}})) \in R^{\mathcal{M}}$ et, par hypothèse de récurrence,

$$(f_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}}), f_{\mathcal{M}}^{n+k-1}(a_{\mathcal{M}})) \in R^{\mathcal{M}}.$$

Comme $\mathcal{M} \models \forall y, y', y''. \neg R(y, y') \vee \neg R(y', y'') \vee R(y, y'')$, en particulier pour l'affectation $y \mapsto f_{\mathcal{M}}^{n}(a_{\mathcal{M}}), y' \mapsto f_{\mathcal{M}}^{n+k-1}(a_{\mathcal{M}}), y" \mapsto f_{\mathcal{M}}^{n+k}(a_{\mathcal{M}})$. On conclut ainsi que $(f_{\mathcal{M}}^{n}(a_{\mathcal{M}}), f_{\mathcal{M}}^{n+k}(a_{\mathcal{M}})) \in R^{M}$
Comme, par ailleurs, pour tout n, $(f_{\mathcal{M}}^{n}(a_{\mathcal{M}}), f_{\mathcal{M}}^{(}a_{\mathcal{M}})) \notin R^{M}$, on conclut que, pour tout n, pour tout $k > 0$, $f_{\mathcal{M}}^{n}(a_{\mathcal{M}}) \neq f_{\mathcal{M}}^{n+k}(a_{\mathcal{M}})$. L'ensemble $\{f_{\mathcal{M}}^{n}(a_{\mathcal{M}}) | n \in \mathbb{N}\}$ est donc infini.