Examen partiel, Logique et calculabilité, L3

7 novembre 2011

Durée: 3h. **Document autorisés:** tous. **Résultats que vous pouvez utiliser:** ceux du cours (Si vous voulez utiliser un résultat vu en TD, il faut le redémontrer).

Les exercices sont indépendants. Les points attribués à chaque question, ainsi que la longueur des solutions sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1

Donner une preuve, en calcul des séquents, du séquent $\vdash A \to (B \to A)$ où A, B sont des variables propositionnelles.
[2 points, 3 lignes]

Exercice 2

$\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de variables propositionnelles. L'ensemble de clauses suivant est il satisfaisable ? Justifier.

$$\begin{array}{llll} P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3 & P_1 \vee \neg P_2, & \neg P_2 \vee \neg P_3, & P_2 \vee P_3 \vee P_4 \\ P_1 \vee P_3 \vee P_4, & \neg P_1 \vee P_3, & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3, & P_1 \vee P_2 \end{array}$$

[4 points, 8 lignes]

Exercice 3

1. Montrer que, si l'on retire la règle d'affaiblissement à $\mathbf{NK}_0$, le système de déduction reste complet. (**Ind**: on pourra montrer, par récurrence sur la preuve π de $\Gamma \vdash \phi$, qu'il existe une preuve sans affaiblissement de $\Gamma \vdash \phi$).
[3 points, 16 lignes]

2. Montrer que, si l'on retire les règles d'introduction de $\vee$ à $\mathbf{NK}_0$, le système de déduction n'est plus complet. (**Ind**: on pourra considérer une interprétation non standard de $\vee$ pour laquelle les nouvelles règles sont correctes et $P \vee Q$ n'est pas conséquence logique de P)
[3 points, 6 lignes]

Exercice 4

Si C est une clause et L un littéral, on note $C\backslash L$ la clause C dans laquelle toutes les occurrences de L ont été retirées: $\perp \backslash L = \perp$ et $(L \vee C) \setminus L = C \setminus L$ et $(L' \vee C) \setminus L = L' \vee (C \setminus L)$ si $L \neq L'$. On considère la règle suivante pour le calcul propositionnel en forme clausale:

$$\frac{P \vee C \qquad \neg P \vee C'}{(C \setminus P) \vee (C' \setminus \neg P)}$$

Montrer que cette règle est, à elle seule, réfutationnellement complète pour le calcul propositionnel en forme clausale.
[5 points, 14 lignes]

Exercice 5

Deux $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ sont *élémentairement équivalentes* si, pour toute formule ϕ sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$, sans variable libre, $\mathcal{S} \models \phi$ si et seulement si $\mathcal{S}' \models \phi$.

Soit $\mathcal{P} = \{\geq\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$. On considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\geq$ étant interprété comme l'ordre habituel sur ces ensembles. Par abus de notation, les structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ seront ci-dessous confondues avec les ensembles (resp. algèbres) sous-jacents.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
   [2 points, 4 lignes]

2. On veut montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Soit $\mathcal{S} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Si σ est une application d'un ensemble fini de variables D dans $\mathcal{S}$, on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre sur D définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $x\sigma \geq_{\mathcal{S}} y\sigma$.

   (a) Montrer que, $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ si et seulement si, pour toute affectation θ des variables libres de ϕ telle que $\geq_\theta$ est identique à $\geq_\sigma$, $\mathcal{S}, \theta \models \phi$.

   (b) En déduire le résultat souhaité.

   [5 points, 21 lignes]