Examen partiel, Logique et calculabilité, L3

10 novembre 2009

Durée: 3h

Document autorisés: tous

Les exercices sont indépendants. Les points attribués à chaque question, ainsi que la longueur des solutions sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1

Donner le BDD de la formule suivante, pour l'ordre $P_1 < P_2 < P_3$ (les plus petites variables sont interprétées d'abord):

$$((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge (P_2 \rightarrow P_1)) \vee (\neg P_3 \wedge \neg P_1)$$

[3 points]

Exercice 2

On considère le calcul propositionnel en forme clausale. Résolution binaire + factorisation est alors un système de preuve réfutationellement complet.

1. Montrer que la résolution binaire seule n'est pas réfutationnelement complète.

   [1 point; 4 lignes]

2. On considère maintenant la résolution binaire + la restriction suivante de la factorisation (=factorisation positive):

   $$\frac{A \vee A \vee C}{A \vee C} \text{ Si } A \text{ est une variable propositionnelle}$$

   Est ce que la résolution binaire+ factorisation positive forment un système d'inférence réfutationnellement complet pour le calcul propositionnel en forme clausale ? Justifier.

   [4 points; 19 lignes]

Exercice 3

On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ de symboles de fonctions et les symboles de prédicat $P(1), Q(1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $s^n(0)$ désigne le terme $\underbrace{s(\cdots s(}_{n} 0) \cdots)$

1. Donner un modèle de l'ensemble de formules

$$\mathcal{E} = \{P(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\exists x.\neg P(x)\} \cup \{\forall x.(Q(x) \vee Q(s(x))) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg Q(s(x))\}$$

   [2 points; 5 lignes]

2. Existe-t-il un modèle fini de $\mathcal{E}$? Sinon, pourquoi ? Si oui, quel est la taille minimal du domaine d'un modèle de $\mathcal{E}$?

   [3 points; 12 lignes]

Exercice 4

On considère le calcul des séquents propositionnel classique, qui se compose des règles d'introduction, des règles structurelles et de la règle de coupure, règles rappelées en annexe.

On suppose que l'on retire la règle d'introduction à gauche de la flèche.

1. Montrer que l'ensemble des règles d'introduction est alors incomplet

   [1.5 points; 5 lignes]

2. Montrer que ces règles restent incomplètes en ajoutant les règles structurelles

   [2 points; 19 lignes]

3. Montrer que ces règles restent incomplètes en ajoutant les règles structurelles et la règle de coupure.

   [1.5 points; 4 lignes]

Exercice 5

On note $\vdash$ la relation de déduction par résolution binaire et factorisation binaire. Montrer que, si P est une variable propositionnelle et E un ensemble de clauses satisfaisable, alors

$$E, \neg P \vdash \perp \quad \text{ssi} \quad E \vdash P$$

(**Ind**: on pourra ou bien généraliser la propriété en s'inspirant de la preuve de complétude de Résolution+factorisation+tiers exclu+affaiblissement (noter que l'on n'a pas ici ces deux dernire règles), ou bien utiliser une transformation de preuves).
[5 points; 20 lignes]

Règles d'inférence du calcul des séquents classique

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \wedge \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \wedge \psi} \wedge \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \vee \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \vee \psi} \vee \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \rightarrow \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi}{\Gamma, \neg\phi \Rightarrow \Delta} \neg \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\phi} \neg \text{ right}$$

$$\frac{}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, A} \text{ Axiom}$$

Figure 1: Le calcul LK_0: règles d'introduction

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta} \text{ weakening left} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi} \text{ weakening right}$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \Delta} \text{ contraction left} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi, \phi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi} \text{ contraction right}$$

Figure 2: Le calcul LK_0: règles structurelles

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \quad \phi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \setminus \{\phi\} \Rightarrow \Delta \setminus \{\phi\}, \Delta'} \text{ cut}$$

Figure 3: La rgle de coupure de LK_0