Partiel de Logique

23 novembre 2005

Les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Durée : 3 heures. La longueur indiquée est celle du corrigé dactylographié. Le barême est indicatif.

Exercice 1

Soit $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$ et $\mathcal{E} = \{P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q,\ P \vee R,\ \neg P \vee Q \vee \neg R\}$. On suppose que $P < Q < R$.

1. Donner l'arbre sémantique de $\mathcal{E}$
2. Quelles sont les interprétations qui satisfont $\mathcal{E}$?
3. Donner un ensemble de clauses $\mathcal{E}^*$, logiquement équivalent à $\mathcal{E}$, tel que toutes les clauses de $\mathcal{E}^*$ s'obtiennent par résolution et factorisation binaire à partir de $\mathcal{E}$ et ne contenant pas de paire de clauses distinctes C_1, C_2 telles que $C_1 \models C_2$.

[10 lignes, 3 points]

Exercice 2

On suppose l'ensemble (dénombrable) de variables propositionnelles totalement ordonné. L'ordre est étendu aux littéraux par : $\neg P > Q$ ssi $P > \neg Q$ ssi $\neg P > \neg Q$ ssi $P > Q$. On considère l'unique règle d'inférence :

$$\frac{P \vee C \quad \neg P \vee C'}{C_{-p} \vee C'} \qquad \text{Si} \begin{cases} P \text{ est maximal dans } C \vee P \\ \neg P \text{ est maximal dans } C' \vee \neg P \end{cases}$$

Où C_{-P} est la clause C dans laquelle toutes les occurrences de P ont été supprimées.

Cette unique règle est elle réfutationnellement complète ? justifier.

[18 lignes, 5 points]

Exercice 3

Pour chacun des séquents suivants, dire s'ils sont prouvables dans LJ_0, et s'ils sont prouvables dans LK_0, quelles que soient les formules ϕ, ψ, θ. Justifier en détail les réponses.

1. $\neg\phi \vee \neg\psi \vdash \neg(\phi \wedge \psi)$
2. $\vdash \neg(\phi \to \neg\phi)$

3. $\neg\neg\phi, \neg\neg\neg\phi \vdash \neg\phi \vee \phi$
4. $\phi \to \neg\phi, \neg\phi \to \phi \vdash \perp$

[40 lignes, 6 points]

Exercice 4

$\mathcal{P}$ désigne un ensemble *fini* de variables propositionnelles.

On désigne par $C(\mathcal{P})$ le plus petit ensemble de formules tel que

- Si k est un entier naturel inférieur ou égal au nombre de variables propositionnelles et $S \subseteq \mathcal{P}$, alors $\mathsf{Atmost}_k(S)$ et $\mathsf{Atleast}_k(S)$ sont des formules de $C(\mathcal{P})$
- Si $\phi, \psi \in C(\mathcal{P})$, alors $\phi \wedge \psi \in C(\mathcal{P})$

Attention : S est ici un ensemble, pas un multi-ensemble. $|S|$ désigne le cardinal de S.

Étant donnée une interprétation I (sous-ensemble de $\mathcal{P}$) et une formule $\phi \in C(\mathcal{P})$, on dira que I *satisfait* ϕ (ce que l'on notera $I \models \phi$) si et seulement si,

- Ou bien ϕ est une conjonction $\phi_1 \wedge \phi_2$ et $I \models \phi_1$ et $I \models \phi_2$
- ou bien $\phi = \mathsf{Atmost}_k(S)$ et $|I \cap S| \leq k$
- ou bien $\phi = \mathsf{Atleast}_k(S)$ et $|I \cap S| \geq k$

1. Montrer que, pour toute formule $\phi \in C(\mathcal{P})$ il existe une formule $\hat{\phi} \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ telle que $I \models \phi$ si et seulement si $I \models \hat{\phi}$.
2. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse : donner une formule $\psi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ telle qu'il n'existe aucune formule $\phi \in C(\mathcal{P})$ telle que $I \models \psi$ si et seulement si $I \models \phi$

[33 lignes, 5 points]

Exercice 5

On note $\vdash$ la relation de déduction par résolution binaire et factorisation binaire. Montrer que, si P est une variable propositionnelle et E un ensemble de clauses satisfaisable, alors

$$E, \neg P \vdash \perp \quad \text{ssi} \quad E \vdash P$$

(**Ind** : on pourra ou bien généraliser la propriété en s'inspirant de la preuve de complétude de Résolution+factorisation+tiers exclu+affaiblissement (noter que l'on n'a pas ici ces deux dernière règles), ou bien utiliser une transformation de preuves).

[21 lignes, 5 points]