Logique et Calculabilité (partie 2) 2011. Examen

26 mai 2011. Durée 3h.

Tous les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Le barême est indicatif (noter qu'il laisse le choix des exercices à traiter). Tous les résultats et les preuves du cours peuvent être utilisés en les mentionnant. Les exercices vus en TD doivent être redémontrés s'ils sont utilisés.

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, qui, si n est le code d'une machine de Turing M ($n =< M >$), et m est le code d'un mot w, associe à (n, m, k) l'entier correspondant au mot sur le ruban, après k étapes de calcul de M sur l'entrée w. f vaut 0 si n n'est pas le code d'une machine de Turing ou bien m n'est pas le code d'un mot. f est-elle récursive ? récursive primitive ? récursive partielle ? Justifier.
[15 lignes, 4 points]

Exercice 2

$\geq$ est défini comme dans la figure 3. Montrer qu'il existe des modèles de l'arithmétique élémentaire (dont les axiomes sont rappelés dans la figure 2) dans lesquels $\geq$ n'est pas une relation d'ordre, mais que, dans PA, on peut démontrer que $\geq$ est une relation d'ordre.
[24 lignes, 7 points]

Exercice 3

Si on supprime ($A_{f\times}$) dans les propriétés de la figure 3, montrer qu'il existe une théorie qui satisfait les (autres) propriétés, mais dans laquelle il existe des fonctions récursives non représentables.
[2 lignes, 3 points]

Exercice 4

Q est l'ensemble des axiomes de l'arithmétique élémentaire, supposée cohérente, rappelé dans la figure 2.

1. Montrer que $R \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid \exists \phi(x), n =< \phi(x) >, Q \vdash \phi(\overline{n})\}$ n'est pas récursif.

2. Montrer que le prédicat P suivant n'est pas récursif :

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{< \phi(x) > \mid \phi(x) \text{ représente dans } Q \text{ un prédicat récursif à 1 argument}\}$$

[8 lignes, 7 points]

Exercice 5

On considère la théorie $\mathcal{T}$ engendrée par les axiomes de l'égalité ainsi que les axiomes de la figure 1, supposant que $\mathcal{F} = \{f(1), g(1), a(0)\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est cohérente
2. Montrer que $\mathcal{T}$ est récursive
3. $\mathcal{T}$ est elle complète ?

[22 lignes, 7 points]

(T_1)	$a = f(a)$	
(T_2)	$\forall x. f(g(x)) = x \wedge g(f(x)) = x$	
$(T_{3,n})$	$\forall x. x = f^n(x) \to x = a$	Pour tout $n \geq 1$
$(T_{4,n})$	$\forall x_1, \ldots, x_n, \exists x. x \neq x_1 \wedge \ldots \wedge x \neq x_n$	Pour tout $n \geq 1$

FIGURE 1 – Axiomes de la théorie $\mathcal{T}$

(A_1)	$\forall x.$	$s(x) \neq 0$
(A_2)	$\forall x, y.$	$s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$
(A_3)	$\forall x.$	$x + 0 = x$
(A_4)	$\forall x, y.$	$x + s(y) = s(x + y)$
(A_5)	$\forall x.$	$x \times 0 = 0$
(A_6)	$\forall x, y.$	$x \times s(y) = (x \times y) + x$
(A_7)	$\forall x.$	$x \neq 0 \Rightarrow \exists y. x = s(y)$

FIGURE 2 – Axiomes de l'arithmétique élémentaire

(A_+)	$T \vdash \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m + n = k$
(A_{f+})	$T \vdash \forall x.(\phi_+(\overline{n}, \overline{m}, x) \to x = \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m + n = k$
$(A_\times)$	$T \vdash \phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m \times n = k$
$(A_{f\times})$	$T \vdash \forall x.(\phi_\times(\overline{n}, \overline{m}, x) \to x = \overline{k})$	Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $m \times n = k$
$(A_=)$	$T \vdash \overline{m} \neq \overline{n}$	Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$
$(A_\leq)$	$T \vdash \forall x.(x \leq \overline{n} \leftrightarrow (x = \overline{0} \vee \ldots \vee x = \overline{n}))$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$(A_{<>})$	$T \vdash \forall x. x \leq \overline{n} \vee x > \overline{n}$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$

où $x \leq y \overset{\text{def}}{=} \exists z. \phi_+(z, x, y)$ et $x > y \overset{\text{def}}{=} \exists z. \phi_+(z, y, x) \wedge x \neq y$.

FIGURE 3 – Quelques propriétés simples de la théorie T