Logique et Calculabilité 2012-2013. Examen

30 mai 2013. Durée 3h.

Tous les documents sont autorisés. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstration. Le barême et la longueur des solutions sont donnés à titre indicatif.

Exercice 1

Parmi les énoncés suivants, dire ceux qui sont vrais, ceux qui sont faux et ceux sur lesquels on ne sait pas conclure. Justifier en donnant si nécéssaire des exemples

1. Toute théorie du premier ordre est incohérente ou incomplète
2. Toute théorie incohérente est décidable
3. Il existe des théories décidables, cohérentes et incomplètes
4. L'arithmétique élémentaire n'a pas de modèle fini
5. $\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n =< \phi(x) >, m =< \Pi(\phi(\overline{n})) >\}$ est définissable dans l'arithmétique élémentaire. ($\phi(x)$ est une formule à une variable libre x, $< \phi(x) >$ est son code dans $\mathbb{N}$, $\Pi(\psi)$ est une preuve de ψ dans l'arithmétique élémentaire et $< \Pi > \in \mathbb{N}$ est son code.)
6. La cohérence de l'arithmétique élémentaire est définissable dans l'arithmétique élémentaire.
7. Si l'on ajoute à l'arithmétique de Peano PA un axiome qui énonce la propre cohérence de PA, on obtient une théorie incohérente ou incomplète.

[7 points, 16 lignes]

Exercice 2

Donner un modèle de l'arithmétique élémentaire dans lequel la relation d'ordre est totale mais n'est pas bien fondée. (On rappelle que l'ordre (strict) est défini par $x > y \stackrel{\text{def}}{=} \exists z. z + y = x \wedge x \neq y$ et qu'un ordre est bien fondé s'il n'existe pas de chaine infinie strictement décroissante $x_1 > \cdots > x_n > \cdots$.)
[5 points, 19 lignes]

Exercice 3

On suppose que $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{R(2), = (2)\}$ et la théorie $\mathcal{T}$ engendrée par les axiomes de l'égalité et les axiomes suivants : On suppose que $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{R(2), = (2)\}$ et la théorie $\mathcal{T}$ engendrée par les axiomes de l'égalité et les axiomes suivants :

(ES)	$\forall x \exists y_1, y_2.$	$R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2$	
(EP)	$\forall x \exists y.$	$R(y, x)$	
(UP)	$\forall x \forall y \forall z.$	$R(x, y) \wedge R(z, y) \to x = z$	
(US)	$\forall x \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3.$	$R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge R(x, y_3) \to y_1 = y_2 \vee y_1 = y_3 \vee y_2 = y_3$	
(T_n)	$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n.$	$R(x_1, x_2) \wedge \ldots \wedge R(x_{n-1}, x_n) \to x_1 \neq x_n$	Pour tout $n \in \mathbb{N}, n > 0$

1. Donner un modèle de $\mathcal{T}$. (**Ind** : on pourra considérer $\mathbb{Z} \times 2^{\mathbb{N}}$)
   [6 lignes, 2 points]
2. Soir $\mathcal{S}$ un modèle de $\mathcal{T}$ et a, b deux éléments du domaine D de $\mathcal{S}$
   (a) Montrer que, pour tout entier n, il existe une unique suite $a = a_0, \ldots a_n \in D$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $(a_i, a_{i-1}) \in R^{\mathcal{S}}$. On note alors $a_n = u_{\mathcal{S}}(a, n)$ et $c \geq_{\mathcal{S}} a$ ssi il existe un n tel que $c = u_{\mathcal{S}}(a, n)$.
   (b) Montrer que si $c \geq_{\mathcal{S}} a$, alors il existe un unique entier n (noté $d_{\mathcal{S}}(a, c)$) tel que $c = u_{\mathcal{S}}(a, n)$. Montrer que $\geq_{\mathcal{S}}$ est une relation d'ordre.
   (c) Montrer que, s'il existe c tel que $c \geq_{\mathcal{S}} a$ et $c \geq_{\mathcal{S}} b$, alors il existe un unique d tel que $d \geq_{\mathcal{S}} a$ et $d \geq_{\mathcal{S}} b$ et ($c \geq_{\mathcal{S}} a$ et $c \geq_{\mathcal{S}} b$) ssi $c \geq_{\mathcal{S}} d$. d est noté $\mathsf{lub}_{\mathcal{S}}(a, b)$. Si un tel majorant n'existe pas, par convention, $\mathsf{lub}_{\mathcal{S}}(a, b) = \perp$.
   (d) Montrer que, pour tout entier n, $\{a' \in D \mid d_{\mathcal{S}}(a', a) = n\}$ a pour cardinal 2^n.
   (e) Montrer que si $a \geq_{\mathcal{S}} c$ et $b \geq_{\mathcal{S}} c$, alors $a \geq_{\mathcal{S}} b$ ou $b \geq_{\mathcal{S}} a$.
   [10 lignes, 2 points]
3. Montrer que deux modèles quelconques de $\mathcal{T}$ sont élémentairement équivalents. (**Ind** : on pourra assurer l'invariant suivant dans un jeu de EF en n rondes : pour toute suite $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$, pour tous i, j, on est dans l'un des cas suivants :
   (a) ($\mathsf{lub}_{\mathcal{S}_1}(a_i, a_j) = \perp$ ou ($d_{\mathcal{S}_1}(a_i, \mathsf{lub}_{\mathcal{S}_1}(a_i, a_j)) > 2^{n-k}$ ou $d_{\mathcal{S}_1}(a_j, \mathsf{lub}_{\mathcal{S}_1}(a_i, a_j)) > 2^{n-k}$)) et ($\mathsf{lub}_{\mathcal{S}_2}(b_i, b_j) = \perp$ ou ($d_{\mathcal{S}_2}(b_i, \mathsf{lub}_{\mathcal{S}_2}(b_i, b_j)) > 2^{n-k}$ ou $d_{\mathcal{S}_2}(b_j, \mathsf{lub}_{\mathcal{S}_2}(b_i, b_j)) > 2^{n-k}$))
   (b) $d_{\mathcal{S}_1}(a_i, \mathsf{lub}_{\mathcal{S}_1}(a_i, a_j)) = d_{\mathcal{S}_2}(b_i, \mathsf{lub}_{\mathcal{S}_2}(b_i, b_j))$ et $d_{\mathcal{S}_1}(a_j, \mathsf{lub}_{\mathcal{S}_1}(a_i, a_j)) = d_{\mathcal{S}_2}(b_j, \mathsf{lub}_{\mathcal{S}_2}(b_i, b_j))$
)
   Note : On prendra soin de définir précisément la stratégie du duplicateur. Il est recommandé d'utiliser des figures pour expliquer les différents cas de la preuve que cette stratégie satisfait l'invariant.
   [50 lignes, 5 points]
4. Que peut-on en conclure sur la théorie ?
   [1 ligne, 1 point]