Logique et Calculabilité 2011-2012. Examen

21 mai 2012. Durée 3h.

Tous les documents sont autorisés. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstration.

Exercice 1

Donner, dans chacun des cas suivants un exemple de théorie du premier ordre T cohérente satisfaisant la propriété souhaitée. Justifier

1. T est récursive et complète
2. T est récursive et incomplète
3. T n'est pas récursivement énumérable et T est complète
4. T n'est pas récursivement énumérable et T est incomplète

Exercice 2

Dans cet exercice, ne pas utiliser les résultats du DM.
Soit $\mathcal{F} = \{S(1), 0(0)\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$ et $\mathcal{T}$ est la théorie engendrée par les axiomes de l'égalité et :

$$\begin{array}{lllcl}
(A_1) & \forall x, y. & s(x) = s(y) & \to & x = y \\
(A_2) & \forall x. & x \neq 0 & \to & \exists y. x = s(y) \\
(A_3) & \forall x. & 0 \neq s(x) & & \\
(A_4^n) & \forall x. & x \neq s^n(x) & &
\end{array}$$

Soient deux modèles M_1 et M_2 de $\mathcal{T}$. On note $d_i(a,b)$ la fonction définie sur le domaine D_i de M_i par : $d_i(a,b) = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ a = s^n_{M_i}(b)\}$. Le minimum est $+\infty$ s'il n'y a pas de tels entiers.

1. Montrer que, pour tout i, pour tous $a, b, c \in D_i$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_i(s^k(a), a) = k$ et que $d_i(a,b) + d_i(b,c) < +\infty$ entraine $d_i(a,b) + d_i(b,c) = d_i(a,c)$.
2. Montrer que, pour tous $a \in D_i$, $k \in \mathbb{N}$, si $d_i(a, 0_{M_i}) \geq k$, il existe $b \in D_i$ tel que $a = s^k_{M_i}(b)$
3. On considère un jeu de Erhenfeucht-Fraïssé sur M_1, M_2 où les coups successifs de D et S sont donnés par les séquences $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ avec, pour tout i, $a_i \in D_1$ et $b_i \in D_2$. Montrer que, étant donné n, D a une stratégie qui permet d'assurer l'invariant $\forall i \leq n, \forall j_1, j_2 \leq i$, si $(d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) \leq 2^{n-i}$ ou $d_2(b_{j_1}, b_{j_2}) \leq 2^{n-i})$ alors $d_1(a_{j_1}, a_{j_2}) = d_2(b_{j_1}, b_{j_2})$.
4. Montrer que $\mathcal{T}$ est complète

Succ	$\forall y.\forall x.x < s(y) \leftrightarrow x = y \vee x < y$
Zero	$\forall x.0 \not> x$
Pred	$\forall x, y.s(x) = s(y) \to x = y$
Proj	$\forall x_1, x_2, y_1, y_2.f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) \to x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$
Inf_1	$\exists x.0 < x \wedge \forall y.y < x \to s(y) < x$
Inf_2	$\forall x, \exists z.\forall y.y < z \leftrightarrow (y = x \vee (\exists y_1, y_2.y = f(s(y_1), s(y_2)) \wedge f(y_1, y_2) < z))$
Comp	$\forall x_0, \forall x.\exists z.\forall y.y < z \leftrightarrow$ $(y = x \vee (\exists y_1, y_2, z_1.y = f(y_1, s(y_2)) \wedge y_1 < x_0 \wedge z_1 < x_0 \wedge \phi(z_1, x, y_1) \wedge f(z_1, z_2) < z))$ Pour toute formule ϕ à trois variables libres

FIGURE 1 – Axiomes de la théorie $\mathcal{E}$

5. Les axiomes A_4^n sont ils tous nécessaires ? Peut-on remplacer cet ensemble d'axiomes par un sous-ensemble fini d'axiomes en conservant la complétude ? Justifier.

Problème

L'objectif est de montrer que toute extension d'une théorie "minimale" des ensembles est incohérente ou incomplète.

On considère $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), f(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{<(2), =(2)\}$ et les axiomes donnés dans la figure 1, que l'on supposera, avec les axiomes de l'égalité, engendrer une théorie $\mathcal{E}$ cohérente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\overline{n} = s^n(0)$.

1. Soient
$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \neq 0 \wedge \forall y.x \neq s(y)$$
$$SP(x,z) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y.y < z \leftrightarrow \exists y_1, y_2.y = f(y_1, y_2) \wedge \quad ((y_1 = x \wedge y_2 = 0) \\ \vee (\exists z_1, z_2.y_1 = s(z_1) \wedge y_2 = s(z_2) \wedge f(z_1, z_2) < z))$$
$$Tr(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \forall w.SP(x, w) \to f(z, y) < w$$
Montrer que :
   (a) $\mathcal{E} \models \forall x.0 \neq s(x)$
   (b) $\mathcal{E} \models \forall x.\exists z.SP(x, z)$.
   (c) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x, z.(Tr(x, \overline{n}, z) \leftrightarrow z = s^n(x))$
   (d) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x, y.Tr(x, y, \overline{n}) \to y = \overline{0} \vee \ldots \vee y = \overline{n}$
   (e) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathcal{E} \models \forall x.(\exists z.Tr(z, \overline{n}, x)) \vee (\exists z.Tr(z, x, \overline{n})) \vee (\exists w, \exists y.L(w) \wedge Tr(w, y, x))$$
Indiquer dans chaque cas les axiomes de $\mathcal{E}$ utilisés.
2. Soit $\phi_+(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} Tr(x, y, z) \vee (\exists w.L(w) \wedge \exists y'.Tr(w, y', x) \wedge x = z)$ Montrer que :
   (a) pour tous entiers $k, m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \phi_+(\overline{n}, \overline{m}, \overline{k})$ ssi $k = n + m$
   (b) pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x.\phi_+(\overline{m}, \overline{n}, x) \to x = \overline{m+n})$
   (c) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x.(\exists z.\phi_+(z, x, \overline{n})) \to (x = \overline{0} \vee \ldots \vee x = \overline{n})$
   (d) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \models \forall x.(\exists z.\phi_+(z, x, \overline{n})) \vee (\exists z.\phi_+(z, \overline{n}, x))$
3. Montrer que toute extension de $\mathcal{E}$ est ou bien incohérente ou bien incomplète.