Examen partiel, Logique

20 mars 2014

Durée: 3h. **Document autorisés:** tous. **Résultats que vous pouvez utiliser:** ceux du cours (Si vous voulez utiliser un résultat vu en TD, il faut le redémontrer).

Exercice 1

On considère l'ensemble de variables propositionnelles $\{P_1, P_2, P_3\}$ et l'ordre $P_3 > P_2 > P_1$. Soit E l'ensemble de 4 clauses suivant:

$$\neg P_1 \vee P_2, \quad \neg P_1 \vee P_3, \quad P_1 \vee \neg P_2, \quad \neg P_3 \vee \neg P_2$$

1. Donner l'arbre sémantique de E
2. Donner le BDD de E
3. Donner une preuve par résolution binaire et factorisation binaire de l'insatisfaisabilité de $E \cup \{P_1 \vee P_2\}$

Exercice 2

Donner une preuve dans NK du jugement $\vdash (B \to A) \vee B$ où A, B sont des variables ropositionnelles.

En existe-t-il un preuve dans NJ ? Justifier

Exercice 3

Dans cet exercice, les symboles de prédicats sont binaires (en nombre arbitraire) et l'ensemble de symboles de fonction est vide. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des formules du prermier ordre sans variable libre dont une forme prénexe est de la forme

$$\exists x_1, \ldots, \exists x_m, \forall y_1, \ldots, \forall y_n . \psi$$

où ψ est sans quantificateur (autrement dit, tout quantificateur existentiel précède tout quantificateur universel).

Montrer que toute formule $\phi \in \mathcal{B}$ qui est satisfaisable possède un modèle fini dont on bornera la taille en fonction de ϕ. En déduire que le problème de la satisfaisabilité d'une formule de $\mathcal{B}$ est dans PSPACE.

Problème

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. que C').

Soit $\geq$ un ordre total bien fondé sur les *littéraux* (par simplicité, on pourra supposer que l'ensemble des littéraux est $\{L_i, i \in \mathbb{N}\}$ et que l'ordre est donné par $L_i > L_j$ ssi $i > j$). On considère la restriction suivante de la rgle de résolution:

$$\frac{C \vee P \quad \neg P \vee C'}{C \vee C'} R^{\mathcal{S}} \qquad \text{Si } P \text{ est maximal dans } C \vee P \text{ ET } \neg P \text{ est maximal dans } \neg P \vee C'$$

Noter qu'il s'agit d'une généralisation de la résolution avec stratégie ordonnée puisqu'on peut avoir $P \geq Q \geq \neg P$ par exemple.

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses, on note $\mathcal{E}^*$ l'ensemble des conséquences de $\mathcal{E}$ par factorisation et résolution suivant la stratégie $\mathcal{S}$ ci-dessus.

1. Montrer que la stratégie négative est un cas particulier de la stratégie ci-dessus (rappel: la stratégie négative consiste à ne faire de résolution que sur des clauses dont l'une des prémisses ne contient que des littéraux négatifs).

2. Si $\mathcal{E}_1$ est un ensemble de clauses, la *stratégie du support* (par rapport à $\mathcal{E}_1$) est la restriction de la résolution binaire au cas où l'une des prémisses est dans $\mathcal{E}_1$. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses on note $R_{\mathcal{E}_1}(\mathcal{E})$ l'ensemble des clauses déductibles de $\mathcal{E}$ par factorisation binaire et par la stratégie du support (par rapport à $\mathcal{E}_1$).

   Donner un ensemble de clauses insatisfaisable $\mathcal{E}$ tel que $R_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})$ ne contient pas la clause vide.

3. Un ensemble de clauses $\mathcal{E}$ est *saturé* si $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$.

   Montrer que, si $\mathcal{E}$ est saturé et ne contient pas $\perp$ et $\mathcal{U}$ est un ensemble de clauses unitaires de $\mathcal{E}$ (i.e., des clauses réduites à un littéral), alors $R_{\mathcal{U}}(\mathcal{E})$ est saturé et ne contient pas $\perp$.

4. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de clauses, soit $U(\mathcal{E})$ l'ensemble de toutes les clauses unitaires de $\mathcal{E}^*$, soit $\mathcal{P}_1 = \{A \in \mathcal{P} \mid A \in U(\mathcal{E}) \text{ ou } \neg A \in U(\mathcal{E})\}$ et $S(\mathcal{E}) = R_{U(\mathcal{E})}(\mathcal{E}^*) \cap \mathcal{F}_0(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1)$ (i.e., les clauses de $R_{U(\mathcal{E})}(\mathcal{E}^*)$ ne contenant pas de variable de $\mathcal{P}_1$). Soit enfin $S_1 \subseteq \mathcal{P}_1$ et $S_2 \subseteq \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$.

   Montrer que ($S_1 \models U(\mathcal{E})$ et $S_2 \models S(\mathcal{E})$) ssi $S_1 \cup S_2 \models \mathcal{E}$.

5. Montrer que, si $\mathcal{E}$ est saturé et ne contient ni $\perp$ ni clause unitaire, et L est un littéral minimal de $\mathcal{E}$, alors $(\mathcal{E} \cup \{\overline{L}\})^* = \mathcal{E} \cup \{\overline{L}\}$.

6. Montrer que, si $\mathcal{E}$ est fini et $\mathcal{E}^*$ ne contient pas $\perp$, on peut construire, à l'aide des questions précédentes, un modèle de $\mathcal{E}^*$.

   En déduire que la stratégie $\mathcal{S}$ est réfutationellement complète.

Note: A titre indicatif, voici la longueur des solutions dans le corrigé: Exercice 1: 13 lignes, Exercice 2: 25 lignes, Exercice 3: 22 lignes, Problème: 63 lignes.