Devoir de logique: calcul propositionnel

February 19, 2014

Soit $\mathcal{P}_n = \{a_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n\}$ un ensembe de variables propositionnelles paramétré par $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. On note $\Gamma_n = \{\bigvee_{j=1}^{n} a_{ij} \mid 1 \leq i \leq n+1\}$ et $\Delta_n = \{a_{i_1,j} \wedge a_{i_2,j} \mid 1 \leq j \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 \leq n+1\}$.

PHP_n est le séquent $\Gamma_n \vdash \Delta_n$. Montrer que c'est une tautologie.

Sous forme clausale, PHP_n est codé par l'ensemble des clauses $S_n = \Gamma_n \cup \overline{\Delta_n}$ où $\overline{\Delta_n} = \{\neg a_{i_1,j} \vee \neg a_{i_2,j} \mid 1 \leq j \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 \leq n+1\}$. Montrer que S_n est insatisfaisable.

La *taille* d'une formule (resp. d'un séquent) ϕ est le nombre de connecteurs logiques et d'occurrences de variables propositionnelles de ϕ.

La *taille* $|\Pi|$ d'une preuve par résolution est le nombre d'applications de la règle de résolution dans la preuve (on ne compte pas les factorisations).

La *taille* $|\Pi|$ d'une preuve en calcul des séquents est le nombre de règles qui sont soit des coupures, soit des règles d'introduction, soit l'axiome (on ne compte pas les contractions ou affaiblissements).

1 Il n'y a pas de petite preuve de PHP en calcul des séquents sans coupure

Dans toute la question, on ne considère que des séquents $\Gamma \vdash \Delta$ construits sur les variables propositionnelles et les seuls connecteurs logiques $\vee, \wedge$.

Si σ est une application d'un sous-ensemble des variables propositionnelles de $\mathcal{P}$ dans $\{\top, \bot\}$, on note $\Gamma^\sigma \vdash \Delta^\sigma$ le séquent défini comme suit:

- $P^\sigma = \sigma(P)$ si P est dans le domaine de σ
- $(\phi \vee \psi)^\sigma = \top$ si $\phi^\sigma = \top$ ou $\psi^\sigma = \top$. $(\phi \vee \psi)^\sigma = \phi^\sigma$ si $\psi^\sigma = \bot$, $(\phi \vee \psi)^\sigma = \psi^\sigma$ si $\phi^\sigma = \bot$. Dans les autres cas, $(\phi \vee \psi)^\sigma = \phi^\sigma \vee \psi^\sigma$
- $(\phi \wedge \psi)^\sigma = \phi^\sigma$ si $\psi^\sigma = \top$, $(\phi \wedge \psi)^\sigma = \psi^\sigma$ si $\phi^\sigma = \top$, $(\phi \wedge \psi)^\sigma = \bot$ si $\phi^\sigma = \bot$ ou $\psi^\sigma = \bot$. Dans les autres cas, $(\phi \wedge \psi)^\sigma = \phi^\sigma \wedge \psi^\sigma$.
- $(\phi_1, \ldots, \phi_p)^\sigma \vdash (\psi_1, \ldots, \psi_q)^\sigma$ est le séquent $\{\phi_i^\sigma \mid \phi_i^\sigma \neq \top\} \vdash \{\psi_j^\sigma \mid \psi_j^\sigma \neq \bot\}$ si, pour rout j, $\psi_j\sigma \neq \top$ et, pour tout i, $\phi_i^\sigma \neq \bot$. Sinon c'est le séquent $\bot \vdash \top$.

Si π est une application d'un ensemble $\mathcal{P}$ de variables propositonnelles dans un ensemble $\mathcal{Q}$ de variables propositionnelles, π est étendue aux formules de manière compatible avec les connecteurs logiques ($\pi(\phi \vee \psi) = \pi(\phi) \vee \pi(\psi)$ par exemple) et par l'identité sur les variables propositionnelles qui ne sont pas dans $\mathcal{P}$.

On dit que PHP_n *se plonge dans* $\Gamma \vdash \Delta$, s'il existe un sous ensemble σ des variables propositionnelles de $\Gamma \vdash \Delta$ et une injection π de $\mathcal{P}_n$ dans l'ensemble des variables propositionnelles de $\Gamma \vdash \Delta$ telle que $\Gamma^\sigma \vdash \Delta^\sigma = \pi(\Gamma_n \vdash \Delta_n)$.

1. Montrer que, si π est une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ dans le calcul des séquents sans coupure, alors, pour tout σ, il existe une preuve de $\Gamma^\sigma \vdash \Delta^\sigma$ de taille inférieure ou égale à celle de π dans le calcul des séquents sans coupure. (Attention: Γ^σ et Δ^σ sont des ensembles de formules).

2. Soit $\Gamma \vdash \Delta$ un séquent tel que toutes les formules de Γ sont construites à l'aide des variables propositionnelles et du seul connecteur logique $\vee$ et toutes les formules de Δ sont construites à l'aide des variables propositionnelles et du seul connecteur logique $\wedge$, Supposons que $\Gamma \vdash \Delta$ s'obtient, soit par introduction du $\vee$ à gauche, soit par introduction du $\wedge$ à droite, à partir des séquents $\Gamma' \vdash \Delta'$ et $\Gamma'' \vdash \Delta''$.

   Montrer que, si PHP_{n+1} se plonge dans $\Gamma \vdash \Delta$, alors

   - ou bien $\Gamma_n \vdash \Delta_n$ se plonge dans $\Gamma' \vdash \Delta'$ et $\Gamma_n \vdash \Delta_n$ se plonge dans $\Gamma'' \vdash \Delta''$
   - ou bien $\Gamma_{n+1} \vdash \Delta_{n+1}$ se plonge dans l'un des séquents $\Gamma' \vdash \Delta'$, $\Gamma'' \vdash \Delta''$.

3. Montrer que toute preuve de $\Gamma_n \vdash \Delta_n$ dans le calcul des séquents sans coupure est de taille au moins $2^n - 1$.

2 Simulation du calcul des séquents sans coupure par la résolution

Si ϕ est une formule du calcul propositionnel (qu'on voit ici comme un arbre étiqueté par les connecteurs logiques), on associe à ϕ une variable propositionnelle A_ψ par sous-formule $\psi \notin \mathcal{P} \cup \{\top, \bot\}$. Par convention, $A_P = P$ si $P \in \mathcal{P} \cup \{\top, \bot\}$, On note $c(\phi)$ l'ensemble des formules:

- $c(\phi) = \emptyset$ si $\phi \in \mathcal{P} \cup \{\top, \bot\}$
- $c(\neg\phi) = \{\neg A_{\neg\phi} \vee \neg A_\phi, A_\phi \vee A_{\neg\phi}\} \cup c(\phi)$
- $c(\phi \vee \psi) = \{\neg A_{\phi\vee\psi} \vee A_\phi \vee A_\psi, \neg A_\phi \vee A_{\phi\vee\psi}, \neg A_\psi \vee A_{\phi\vee\psi}\} \cup c(\phi) \cup c(\psi)$
- $c(\phi \wedge \psi) = \{A_{\phi\wedge\psi} \vee \neg A_\phi \vee \neg A_\psi, \neg A_{\phi\wedge\psi} \vee A_\phi, \neg A_{\phi\wedge\psi} \vee A_\psi\} \cup c(\phi) \cup c(\psi)$
- $c(\phi \to \psi) = \{\neg A_{\phi\to\psi} \vee \neg A_\phi \vee A_\psi, A_{\phi\to\psi} \vee \neg A_\psi, A_\phi \vee A_{\phi\to\psi}\} \cup c(\phi) \cup c(\psi)$

On note $\mathcal{E} \vdash_R C$ si C se déduit de l'ensemble de clauses $\mathcal{E}$ par résolution et factorisation binaires.

1. Montrer que, si Π est une preuve de $\mathcal{E}, \overline{L} \vdash_R C$ où L est un littéral, $\overline{L}$ est le littéral complémentaire et C est une clause différente de $\overline{L}$, alors ou bien $\mathcal{E} \vdash_R C$ ou bien $\mathcal{E} \vdash_R C \vee L$ et, dans les deux cas, il existe une preuve est de taille au plus $|\Pi|$.

2. Montrer qu'il existe un polynôme P telle que, si π est une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ dans le calcul des séquents sans coupure, alors il existe une preuve π' par résolution et factorisation de $\{c(\phi) \mid \phi \in \Gamma \cup \Delta\} \cup \{A_\phi \mid \phi \in \Gamma\} \cup \{\neg A_\psi \mid \psi \in \Delta\} \vdash \perp$ telle que la taille de π' est bornée par $P(|\pi|)$.

3 Il n'y a pas de preuve courte de PHP par résolution

On fixe une preuve d'insatisfaisabilité de S_n par résolution et factorisation binaire. On note D_n l'ensemble des clauses dérivées par cette preuve (les clauses étiquetant les noeuds de la preuve). On suppose de plus que D_n est de cardinal minimal.

1. On note $V(C)$ l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans C et $\widehat{a_{i,j}}$ la clause $a_{1,j} \vee \cdots \vee a_{i-1,j} \vee a_{i+1,j} \vee \cdots \vee a_{n+1,j}$. Si C est une clause, $\widehat{C}$ est la clause obtenue en remplaçant tous les littéraux négatifs $\neg P$ par $\widehat{P}$ dans C.

   On note $\mathcal{I}^-$ l'ensemble des interprétations α telles qu'il existe exactement un indice i tel que:

   - pour tout $k \neq i$, il existe un unique indice j_k, tel que $a_{k,j_k} \in \alpha$
   - $a_{i,1}, \ldots, a_{i,n} \notin \alpha$

   Pour toute clause C on note enfin

   $$w(C) = \min\{|W| \mid W \subseteq \Gamma_n, \forall \alpha \in \mathcal{I}^-, \alpha \models W \text{ entraine } \alpha \models C\}$$

   (a) Montrer que, si $\alpha \in \mathcal{I}^-$, alors $\alpha \models C$ ssi $\alpha \models \widehat{C}$.

   (b) Calculer $w(C)$ pour $C \in \Gamma_n$, $C \in \overline{\Delta_n}$ et $C = \perp$.

   (c) Montrer que, si C s'obtient à partir de C_1, C_2 par une étape de résolution binaire, alors $w(C) \leq w(C_1) + w(C_2)$.

   (d) En déduire qu'il existe $C_0 \in D_n$ telle que $\frac{n+1}{3} \leq w(C_0) \leq 2 \times \frac{n+1}{3}$.

   (e) Montrer que, pour toute clause C, $|V(\widehat{C})| \geq w(C) \times (n + 1 - w(C))$.

   (f) En déduire le lemme de Haken: D_n contient une clause C_0 telle que $|V(\widehat{C_0})| \geq 2 \times \frac{(n+1)^2}{9}$.

2. Soit $L_n = \{\widehat{C} \mid C \in D_n, |V(\widehat{C})| \geq \frac{(n+1)^2}{8}\}$.

   (a) Montrer qu'il existe une variable $a_{i,j}$ qui apparaît dans au moins $\frac{|L_n|}{8}$ clauses de L_n.

   (b) Montrer qu'il existe une preuve d'insatisfaisabilité de S_{n-1} par résolution binaire telle que $|L_{n-1}| \leq \frac{7}{8}|L_n|$.

   (c) En utilisant la question 1f (et l'inégalité $(\frac{8}{7})^6 \geq 2$) montrer que $|L_n| \geq 2^{\frac{n+1}{24}}$.
   Et donc que toute preuve d'insatisfaisabilité de S_n par résolution et factorisation binaire contient au moins $2^{\frac{n+1}{24}}$ noeuds distincts...

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta} \wedge \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \wedge \psi} \wedge \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \Delta} \vee \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \vee \psi} \vee \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \to \psi \vdash \Delta} \to \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \to \psi} \to \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta} \neg \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\phi} \neg \text{ right}$$

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \Delta, \phi} \text{ Axiom}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta} \text{ weakening left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \phi} \text{ weakening right}$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta} \text{ contraction left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \phi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi} \text{ contraction right}$$

Figure 1: Le calcul LK_0^-

4 Il existe une preuve courte de PHP dans le calcul des séquents avec coupure

Ce serait l'objet d'un autre DM...